

En route pour le niveau 7 :

■ Comment franchir l'étape 1

(Niveau 5)

- Traitez l'exercice ci-dessous et remettez moi votre copie.
- Si elle est correctement rédigée et proprement présentée, elle vous permettra d'atteindre le niveau 5.
- La date limite est le 24 septembre^a

■ Comment franchir l'étape 2

(Niveau 7)

- Une fois l'étape 1 franchie^b, vous recevrez un lien vers l'énoncé d'un nouvel exercice.
- Si vous réussissez à traiter ce nouvel exercice, vous atteindrez le niveau 7

a. Il faut rendre plus tôt si vous envisagez de franchir l'étape 2.

b. i.e. une fois que vous avez rendu l'exercice et que celui-ci a été corrigé

Exercice 6

— Partie I —

Soit $p \geq 2$ entier. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(p) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}$.

1. Montrer par un argument de convexité que pour tout entier $k \geq 2$: $\frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{p-1} \left(\frac{1}{(k-1)^{p-1}} - \frac{1}{k^{p-1}} \right)$.
2. En déduire que la suite $\left(S_n(p) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On notera $S(p)$ sa limite (qui dépend de l'entier p).

— Partie II —

Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, on pose $x_{n,k} = \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}$, puis $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2}$ et $b_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 x_{n,k}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Par un argument de convexité, montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$: $\sin x \leq x \leq \tan x$, puis en déduire ensuite que : $\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2 x}$.
4. a) Montrer que $b_{n+1} = 4b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Indication : Commencer par montrer que $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{4}{\sin^2(2x)}$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
b) En déduire une expression explicite de b_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{\pi^2}{8} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \leq a_{2^n-1} \leq \frac{\pi^2}{8}$.
b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{\pi^2}{8} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \leq a_n \leq \frac{\pi^2}{8}$.
Indication : Introduire l'unique entier p tel que $2^p - 1 \leq n < 2^{p+1} - 1$.
- c) Exprimer $S_{2^{n+1}}(2)$ en fonction de $S_n(2)$ et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que $S(2) = \frac{\pi^2}{6}$.