

En route pour le niveau 6 :

■ Comment franchir l'étape 1

(Niveau 4)

- Traitez l'exercice ci-dessous et remettez moi votre copie.
- Si elle est correctement rédigée et proprement présentée, elle vous permettra d'atteindre le niveau 4.
- La date limite est le 24 septembre^a

■ Comment franchir l'étape 2

(Niveau 6)

- Une fois l'étape 1 franchie^b, vous recevrez un lien vers l'énoncé d'un nouvel exercice.
- Si vous réussissez à traiter ce nouvel exercice, vous atteindrez le niveau 6

a. Il faut rendre plus tôt si vous envisagez de franchir l'étape 2.

b. i.e. une fois que vous avez rendu l'exercice et que celui-ci a été corrigé

Exercice 4

— Partie I —

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. On souhaite démontrer l'inégalité : $(\star) \quad \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}.$

1. Montrer l'inégalité $(\star)$ dans le cas où : $x_1 = \dots = x_n = 0$.

2. On suppose à présent $x_1, \dots, x_n$ non tous nuls et on pose pour tout $t \in \mathbb{R}$: $S(t) = \sum_{k=1}^n (x_k t + y_k)^2.$

Montrer que S est une fonction polynomiale de degré 2 et calculer son discriminant, puis conclure.

— Partie II —

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}_+^*$. On pose : $m = \min_{1 \leq k \leq n} \frac{x_k}{y_k}$ et $M = \max_{1 \leq k \leq n} \frac{x_k}{y_k}.$

3. Montrer que : $\sum_{k=1}^n x_k^2 + mM \sum_{k=1}^n y_k^2 \leq (m+M) \sum_{k=1}^n x_k y_k.$

4. En déduire : $\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2} \leq \frac{m+M}{2\sqrt{mM}} \sum_{k=1}^n x_k y_k.$