

Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

■ Exercice de cours

Exercice 1 *Exercice feuille 9* — Déterminer, suivant la valeur de $a \in \mathbb{C}$ l'expression des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$

Exercice 2 *Exercice feuille 9* — Soit $a \in]0, 1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \prod_{k=0}^n (1 + a^k)$. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 3 *Cours, chap 10, III* — Démontrer que si u et v sont adjacentes, alors elles convergent vers une même limite.

■ Feuille 9 : exercices traités et compétences en jeu

Compétences	Savoir-Faire	Exercices
Reconnaître et expliciter le terme général d'une suite arithmético-géométrique	SF 1	6
Reconnaître et expliciter le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2	SF 2	1 2 3 4
Etudier une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$	SF 4.2	30 31 32
Connaître et savoir appliquer le théorème des suites adjacentes	SF 8 SF 4	27 29
Montrer la convergence à l'aide du théorème de la limite monotone	SF 3 SF 4 SF 6	19 20 21 23 26
Etudier la limite d'une suite à l'aide du théorème d'encadrement	SF 3 SF 7	14 16 17
Utiliser les théorèmes d'opérations sur les limites	SF 5 SF 7	10 11

1 Vocabulaire de base

Généralités sur la notion de suite réelle, définitions liées à l'ordre.

Théorème : Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u est bornée et si v converge vers 0, alors uv converge vers 0.

En pratique : montrer qu'une suite est croissante

- On peut montrer que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et soient $q, r \in \mathbb{C}$.

- On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *arithmétique de raison r* si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

Le terme général est alors donné pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = u_0 + nr$.

- On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *géométrique de raison q* si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$$

Le terme général est alors donné pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = q^n u_0$.
(on a aussi $u_n = q^{n-1} u_1$)

Théorème : Limite d'une suite géométrique

Soit $q \in \mathbb{R}$	$q > 1$	$q = 1$	$ q < 1$	$q \leq -1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	$+\infty$	1	0	Pas de limite

2 Suites particulières

2.1 Suites arithmético-géométriques

Définition

Une suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *arithmético-géométrique* s'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$

Calculer le terme général d'une suite arithmético-géométrique

- On introduit l'unique $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$.
- La suite v de terme général $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison a .
- En calculant α , on en déduit une expression de $u_n = v_n + \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre deux

- Etant donné $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, avec $b \neq 0$, on considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
- On appelle *équation caractéristique* de la suite l'équation du second degré d'inconnue $\lambda \in \mathbb{C}$: $(\mathcal{C}) \quad \lambda^2 - a\lambda - b = 0$

Théorème : Expression du terme général u_n en fonction de n

• $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Discriminant Δ de $(\mathcal{C})$	Racines de $(\mathcal{C})$	Il existe $A, B \in \mathbb{C}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2	$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$
$\Delta = 0$	λ_0	$u_n = (A + Bn)\lambda_0^n$

• $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Discriminant Δ de $(\mathcal{C})$	Racines de $(\mathcal{C})$	Il existe $A, B \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2	$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$
$\Delta = 0$	λ_0	$u_n = (A + Bn)\lambda_0^n$
$\Delta < 0$	$re^{\pm i\theta}$	$u_n = r^n (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$

3 Existence et/ou calcul de limites

3.1 Opérations sur les limites

Lorsque u et v ont des limites (finies ou non), on peut souvent conclure quant à l'existence et la valeur de $\lim(u_n + v_n)$, $\lim(u_n v_n)$ et $\lim(\frac{u_n}{v_n})$ (voir les tableaux)

3.2 Limites et inégalités larges

Théorème : Passages aux limites dans les inégalités larges

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

i) u et v possèdent des limites finies. ii) A partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.
Alors : $\lim u_n \leq \lim v_n$.

⚡ **Attention** ⚡ L'implication : $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n) \implies (\ell_1 < \ell_2)$ est fausse.

3.3 Les théorèmes de comparaison

Théorème : Théorème d'encadrement

Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

i) u et w convergent vers une même limite ℓ ;
ii) à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$;
alors v converge et $\lim v_n = \ell$.

• **Remarque.** Théorème « 2 en 1 » qui fournit : 1. l'existence de la limite 2. sa valeur.

Théorème : Théorème de majoration /minoration

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

• Si $u_n \rightarrow +\infty$, alors $v_n \rightarrow +\infty$. • Si $v_n \rightarrow -\infty$, alors $u_n \rightarrow -\infty$.

3.4 Suites monotones

Théorème : Théorème de la limite monotone

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite croissante alors u possède une limite. Plus précisément :

• Si u est majorée, alors u converge. • Si u n'est pas majorée : $u_n \rightarrow +\infty$.

• **N.B.** Théorème jumeau pour les suites décroissantes, minorées ou non.

3.5 Suites adjacentes

Définition

Deux suites $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, sont dites *adjacentes* si :

1. L'une est croissante, l'autre décroissante. 2. $v_n - u_n \rightarrow 0$.

Théorème

Si u et v sont adjacentes, alors elles convergent vers une même limite.

4 Notions sur les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

• **Cadre.** • $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est monotone • On étudie une suite u telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

4.1 Rappels

• **Intervalle stable par f .** Un intervalle $I \subset D$ est *stable* par f si $f(I) \subset I$ i.e. $f(x) \in x$ pour tout $x \in I$.

• **En pratique.** Si I est stable par f et si $u_0 \in I$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à termes dans I .

Théorème : Critère « $f(\ell) = \ell$ »

Si (u_n) converge vers $\ell \in D$, et si f est continue en ℓ , alors ℓ est un point fixe de f

⚡ **Attention** ⚡ Ce théorème ne prouve jamais la convergence de la suite

4.2 Cas où f est croissante

Théorème

Soit I un intervalle stable par f et $u_0 \in I$. Si f croissante sur I alors u est monotone

Cas où f est croissante

- *Etudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$.*
 - Les zéros de g sont les points fixes de f (candidats limites si f est continue)
- *Etudier la limite de (u_n) lorsque f est croissante.* On montre que :
 1. (u_n) est à termes dans un intervalle où g est de signe constant
 2. (u_n) est monotone (croissante ou décroissante selon le signe de g).
 3. (u_n) a une limite (avec le théorème de la limite monotone)

4.3 Cas où f est décroissante

Théorème

Soit I un intervalle stable par f et $u_0 \in I$. Si f décroissante sur I alors $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraire.