

Toutes les définitions / énoncés du cours sont à connaître précisément.

■ Exercices de cours

Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève pris en défaut de connaissance sur un des exercices de cours.

Exercice 1 — Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$

1. Cours, chap 9–II. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
2. Exercice feuille 8. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 2 — Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$

1. Cours, chap 9–II. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
2. Exercice feuille 8. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Exercice 3 Ex. de cours, chap 9–III — On note f l'application $z \mapsto z^2$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

1. On note Δ la droite d'équation $y = x$. Montrer que $f(\Delta) = i\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}^*) = i\mathbb{R}^*$.

■ Feuille 8 : exercices traités et compétences en jeu

Compétences	Savoir-Faire	Exercices
Prouver qu'une application concrète est ou n'est pas injective/surjective	SF 4 SF 5 SF 7 SF 8	1 3 4 5 8
Prouver qu'une application concrète est bijective	SF 10	1 2 6 7
Montrer ou exploiter l'injectivité/la surjectivité/la bijectivité d'une application dans un cadre abstrait	SF 4 SF 6 SF 7 SF 9 SF 10	17 18 23
Déterminer l'image ou l'image réciproque d'une partie par une application concrète	SF 11 SF 12	10 11 12 14 15
Manipuler image et image réciproque d'une partie par une application dans un cadre abstrait	SF 1	23 28

■ Feuille 8-bis : exercices traités et compétences

Compétences	Savoir-Faire	Exercices
Montrer que deux ensembles sont égaux	SF 1	5 6
Montrer qu'une relation binaire est une relation d'ordre	SF 3	11
Montrer qu'une relation binaire est une relation d'équivalence	SF 2	10
Déterminer la classe d'équivalence d'un élément pour une relation d'équivalence		10

1 Injections, surjections, bijections

- **Cadre.** E et F sont deux ensembles.

1.1 Les définitions

- **Définitions.** Notion d'application de E dans F , définition de l'image d'un élément de E , d'un antécédent d'un élément de F par une application.

- **En pratique.** Si $y \in F$ est donné, trouver les antécédents de y revient à résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.

Définition

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite :

- *Injective* si tout élément de F a *au plus* un antécédent par f .
- *Surjective* si tout élément de F a *au moins* un antécédent par f .
- *Bijective* si tout élément de F a *exactement* un antécédent par f .
Donc f est bijective si et seulement si f est injective et surjective.

1.2 Prouver l'injectivité en pratique

En pratique : pour montrer que f est injective

- f est injective ssi pour tous $x, x' \in E$: $f(x) = f(x') \implies x = x'$.
- **Rédaction type.** « Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$ donc $x = x'$. »

Théorème : Cas des fonctions réelles strictement monotones

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.
Si f est strictement monotone sur D , alors f est injective.

1.3 Prouver la surjectivité en pratique

Rédaction : pour montrer que f est surjective

« Soit $y \in F$ » ... (on construit $x \in E$ tel que $f(x) = y$.)

2 Composition, réciproque

2.1 Composition des applications

Définition

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. La composée de f et g est l'application $g \circ f : E \rightarrow G$ définie pour tout $x \in E$ par : $g \circ f(x) = g(f(x))$

Théorème : Associativité

Soient $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Définition

L'identité de E est l'application $\text{Id}_E : E \rightarrow E$.

$$x \mapsto x$$

Pour toute fonction $f : E \rightarrow F$: $\bullet \text{Id}_F \circ f = f$ $\bullet f \circ \text{Id}_E = f$.

Théorème

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

2.2 Réciproque d'une bijection

Définition

Soit $f : E \rightarrow F$ une application **bijective**. L'application *réciproque* de f est l'application $f^{-1} : F \rightarrow E$ qui, à tout élément de F , associe **son** antécédent par f :

- Etant donné $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est l'unique $x \in E$ solution de l'équation : $f(x) = y$.
- Pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$: $f(x) = y \stackrel{\text{def}}{\iff} x = f^{-1}(y)$

Théorème

Lorsque $f : E \rightarrow F$ est bijective, $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$

Théorème

Soit $f : E \rightarrow F$ une application *a priori* quelconque.

On suppose qu'il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$.

Alors f est bijective et $g = f^{-1}$

- **Conséquence.** Si f est bijective, alors f^{-1} l'est aussi et $(f^{-1})^{-1} = f$

En pratique : Trois méthodes pour montrer que $f : E \rightarrow F$ est bijective

1. On trouve (connaît) $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$.
2. On fixe $y \in F$ et on montre que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ possède une unique solution.
3. On prouve que f est injective et surjective

Théorème : Réciproque d'une composée

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications bijectives.

Alors $g \circ f$ est bijective et : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

3 Action de f sur les sous-ensembles de E et F

3.1 Images directes, images réciproques

Définition

Soit $A \subset E$ et $f : E \rightarrow F$. L'*image (directe)* de A par f est l'ensemble, noté $f(A)$, des images par f des éléments de A : $f(A) \stackrel{\text{def.}}{=} \{f(x), x \in A\}$.

- **Retenir.** $y \in f(A)$ signifie : $\text{il existe } x \in A \text{ tel que } f(x) = y$

Cas d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Penser à utiliser le tableau de variation de f .

Définition

Soit $B \subset F$ et $f : E \rightarrow F$. L'*image réciproque* de B par f est l'ensemble, noté $f^{-1}(B)$, des antécédents par f des éléments de B : $f^{-1}(B) \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

- **Retenir.** $x \in f^{-1}(B)$ signifie $f(x) \in B$

⚡ **Attention** ⚡ $f^{-1}(B)$ est défini même si f n'est pas bijective (l'écriture « $f^{-1}(B)$ » est un bloc défini sans utiliser f^{-1}).

Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- Chercher $f^{-1}(\{y\})$ revient à résoudre l'équation $f(x) = y$.
- Chercher $f^{-1}([a, b])$ revient à résoudre l'inéquation $a \leq f(x) \leq b$.

3.2 Prolongement, restriction d'une application

Définition

Soient A une partie de E et $f : E \rightarrow F$. On appelle restriction de f à A l'application $f|_A : A \rightarrow F$ définie pour tout $x \in A$ par : $f|_A(x) = f(x)$

Définition

Soient A une partie de E et $f : A \rightarrow F$. Un **prolongement** de f à E est une application $\tilde{f} : E \rightarrow F$ telle que pour tout $x \in A$: $\tilde{f}(x) = f(x)$

4 Relations binaires sur un ensemble E

Définition

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une partie de $E \times E$.

- **Interprétation.** Une relation binaire sur E est une propriété $\mathcal{R}$ qui s'applique aux couples d'éléments de E . Etant donné $(x, y) \in E \times E$, lorsque (x, y) vérifie $\mathcal{R}$, on écrit $x\mathcal{R}y$

4.1 Relations d'ordre

Définition

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E . On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si $\mathcal{R}$ est :

- *Réflexive* : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
- *Antisymétrique* : $\forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies x = y$.
- *Transitive* : $\forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$

Définition

Une relation d'ordre $\triangleleft$ sur E est dite :

- *Totale* si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables i.e. :
$$\forall (x, y) \in E^2, (x \triangleleft y \text{ ou } y \triangleleft x)$$
- *Partielle* si elle n'est pas totale i.e. si :
$$\exists (x, y) \in E \times E \mid (x \not\triangleleft y \text{ et } y \not\triangleleft x)$$

Définition

Soit $\triangleleft$ une relation d'ordre sur E et $A \in \mathcal{P}(E)$.

- On dit que A est *majorée* (pour $\triangleleft$) si il existe $M \in E$ tel que :

$$\forall a \in A, a \triangleleft M$$

- On appelle *plus grand élément* de A (pour $\triangleleft$) tout majorant de A appartenant à A

- **Remarque.** Si A possède un plus grand élément pour une relation d'ordre $\triangleleft$, alors il est unique.

4.2 Relations d'équivalence

Définition

On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si $\mathcal{R}$ est :

- *Réflexive* : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
- *Symétrique* si : $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$.
- *Transitive* : $\forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$

Théorème

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E .

- Pour tout $x \in E$, la classe d'équivalence de x (pour $\mathcal{R}$) est l'ensemble des éléments en relation avec x à savoir : $\underset{\text{déf.}}{\text{cl}(x)} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$
- Ces classes d'équivalence forment une *partition* de E :
 - Aucune n'est vide
 - Leur réunion est E .
 - Deux classes distinctes sont disjointes.

L'adresse de la page des maths est : <https://mathieucathala.fr>