

■ Exercice de cours sur 8 points

L'un des exercices de la liste fournie.

■ Feuille 6 : exercices traités et compétences en jeu

Compétences	Savoir-Faire	Exercices
Résoudre une équation différentielle d'ordre 1	SF 1	1 2 3 5
Résoudre une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants et second membre exponentiel	SF 2 SF 3 SF 4	6 7 8
Mettre en œuvre un changement de fonction inconnue dans une équation du second ordre à coefficients non constants	SF 2 SF 3 SF 4	9 10
Résoudre une équation fonctionnelle sur des fonctions dérivables	SF 5	13 14 16 19
Utiliser la méthode de variation de la constante pour obtenir une écriture intégrale des solutions	SF 1	4 20

EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES

1 Equations du premier ordre

- **Cadre.** • $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. • I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.1 Généralités

On étudie l'équation : $(E) \quad y' + a(t)y = b(t)$ où :

- l'inconnue est une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{K}$, dérivable.
- $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont deux fonctions continues fixées (b est le second membre)

1.2 Equation homogène

- **Cadre.** • On cherche à résoudre $(E_0) \quad y' + a(t)y = 0$ • A est une primitive de a sur I

Théorème

Les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme $t \mapsto Ce^{-A(t)}$ où C décrit $\mathbb{K}$

1.3 Equations avec second membre

■ Structure de l'ensemble des solutions

- **Cadre.** On suppose avoir trouvé une solution particulière y_1 de (E) .

Théorème : Structure de l'ensemble des solutions

Les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme $y_1 + y_0$ où y_0 est une solution quelconque de (E_0) .

« **LES** solutions de (E) = **UNE** solution particulière + **LES** solutions de (E_0) »

■ Méthode générale de résolution par variation de la constante.

En pratique : résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1

1. **Résolution de l'équation homogène.** Les solutions sont toutes les fonctions de la forme $y_0 : t \mapsto Ce^{-A(t)}$ où $C \in \mathbb{K}$ et où A est une primitive de a .
2. **Variation de la constante.** On cherche une solution particulière y_1 sous la forme $y_1 : t \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$ y_1 est solution pourvu que $\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$ pour tout $t \in I$
3. **Conclusion.** Les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $y_0 + y_1$ où y_0 est une solution quelconque de (E_0)

■ Solutions particulières simples

- a) Solution « évidente ».
- b) Si a et b sont des fonctions constantes. La fonction constante $y_1 = -\frac{b}{a}$ est solution
- c) **Principe de superposition.** Lorsque le second membre est de la forme $b_1 + b_2$, une solution particulière est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre b_1 et d'une solution de l'équation avec second membre b_2 .

■ Conditions initiales.

Théorème

Pour tout $(t_0, \alpha) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) & \text{sur } I \\ y(t_0) = \alpha. \end{cases}$$

1.4 Application classique : une équation fonctionnelle

L'exercice classique suivant a été traité en cours et est à savoir refaire :

Exercice 1 — Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables, vérifiant :
 $\forall x, t \in \mathbb{R}, f(x+t) = f(x)f(t)$

2 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

2.1 Généralités

On étudie ici les équations de la forme : $(E) \quad y'' + ay' + by = s(t)$, où :

- L'inconnue est une fonction deux fois dérivable $y : I \rightarrow \mathbb{K}$
- $a, b \in \mathbb{K}$ sont des constantes.
- $s : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction continue (le second membre).

■ Résultats généraux. analogues à ceux sur le premier ordre :

- Un théorème de structure assurant que si l'on dispose d'une solution particulière y_1 de (E) , alors les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $y_1 + y_0$ où y_0 est une solution quelconque de (E_0) .
- Un principe de superposition des solutions.
- Un théorème sur les conditions initiales assurant qu'étant donnés $t_0 \in I$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$y'' + ay' + by = s(t) \quad \text{avec} \quad y(t_0) = \alpha \quad \text{et} \quad y'(t_0) = \beta$$

■ Equation caractéristique

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$ est solution de (E_0) ssi λ vérifie $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

Définition

L'équation du second degré $(\mathcal{C}) : \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ est l'équation caractéristique.

2.2 Equation homogène

On cherche à résoudre : $(E_0) \quad y'' + ay' + by = 0$.

Théorème : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Discriminant Δ de $(\mathcal{C})$	Racines de $(\mathcal{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2	$t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	$t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda_0 t}$

Théorème : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

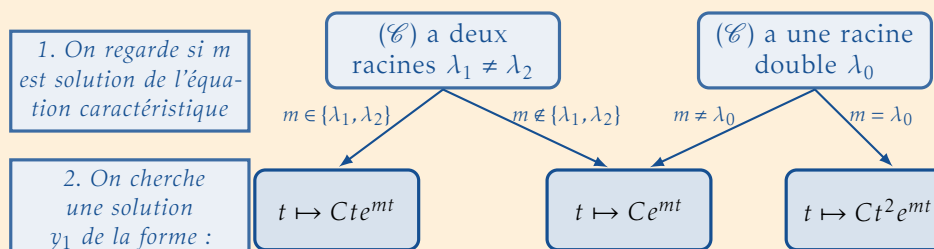
Discriminant Δ de $(\mathcal{C})$	Racines de $(\mathcal{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2	$t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	$t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda_0 t}$
$\Delta < 0$	$\alpha \pm i\beta$	$y : t \mapsto e^{\alpha t}(A \cos \beta t + B \sin \beta t)$

2.3 Equations avec second membre exponentiel

On étudie ici l'équation : $(E) \quad y'' + ay' + by = s(t)$.

On associe à (E) l'équation homogène : $(E_0) \quad y'' + ay' + by = 0$.

En pratique : trouver une solution particulière de $y'' + ay' + by = Ke^{mt}$



⚡ **Attention** ⚡ C est à trouver explicitement (en testant y_1 dans l'équation)

Cas où $f(t) = K \cos \omega t$ ou $K \sin \omega t$

1. On cherche une solution particulière pour le second membre $s(t) = Ke^{i\omega t}$
2. On prend la partie réelle ou la partie imaginaire de la solution obtenue.

2.4 Application classique : une (autre) équation fonctionnelle

L'exercice classique suivant a été traité en cours et est à savoir refaire :

Exercice 2 — Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = f(\pi - x)$.

L'adresse de la page des maths est : <https://mathieucathala.fr>