

Cette feuille est composée d'exercices ou résultats de cours qui ont tous été corrigés ou démontrés en classe.

La colle débutera par la présentation d'un de ces exercices, celui-ci sera noté sur 8 points.

Plus que de simplement savoir les résoudre, le but est d'être capable d'en exposer clairement la solution à quelqu'un : suivant les cas, cela peut par exemple impliquer de savoir synthétiser les idées principales, de préciser quels résultats du cours sont mis en jeu, d'effectuer efficacement les calculs ...

■ Partie entière

Exercice 1 *Exercice feuille 0* — Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

■ Rappels sur l'étude de fonctions, convexité

Exercice 2 *Théorème et exemple de cours, chap 0 (II)* —

1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable, telle que f' est croissante sur I . Montrer que pour tous $a, x \in I$: $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$. Interpréter graphiquement cette inégalité.
2. Etablir : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$.

Exercice 3 *Exemple de cours, chap. 1 (I)* — Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) - f(y) = (x-y)f'\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Exercice 4 *Théorème de cours, chap 1 (II)* — Montrer que si f est convexe sur un intervalle I alors pour tout $a \in I$, la fonction $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$ (On ne demande pas ici de démontrer l'implication réciproque)

Exercice 5 *Théorème de cours, chap 1 (II) (démontré dans la partie II du chap 2)* — Enoncer et démontrer l'inégalité de Jensen.

■ Fonctions trigonométriques

Exercice 6 *Résultat de cours, chap. 1 (III)* —

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.
Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - \varphi)$.
2. Résoudre l'équation $\cos x + \sin x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 *Exemple de cours, chap. 0 (III)* — Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $|\sin nx| \leq n |\sin x|$.

Exercice 8 *Ex. de cours, chap. 3 (II.3)* — Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $C_n = \sum_{k=0}^n \cos kx$.

■ Autour de la formule du binôme

Exercice 9 *Résultat de cours, chap. 2 (III)* — Enoncer et démontrer la formule du binôme de Newton dans $\mathbb{C}$.

Exercice 10 *Exercice feuille 2* — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $A_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$.

■ Nombres complexes

Exercice 11 *Exercice feuille 3* — Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 2.

1. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, déterminer le module de $z^k - 1$.
2. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 12 *Exercice de cours chap 3, III* — Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$.

Montrer que $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$ avec égalité ssi $z_1, \dots, z_n$ ont même argument.

Exercice 13 *Résultats de cours, chap 5, I.1* — Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

1. Démontrer le théorème donnant la liste des racines de l'unité. Placer ces racines sur le cercle trigonométrique dans le cas où $n = 3$ et dans le cas où $n = 4$.
2. Combien vaut la somme des racines n -ièmes de l'unité? Démontrer ce résultat.

Exercice 14 *Exercice de cours, chap. 5 (I.1)* — Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$.
2. Montrer que les solutions sont réelles et les exprimer simplement à l'aide des fonctions cosinus et sinus.

Exercice 15 *Exercice feuille 3* — Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$

■ Exponentielle, logarithme, puissances

Exercice 16 *Exercice feuille 4* — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de α , le nombre de solutions dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $e^x = x^\alpha$.

Exercice 17 *Exercice feuille 4* — Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$: $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

■ Fonctions hyperboliques

Exercice 18 *Exercice feuille 4* — Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\operatorname{th} x < x < \operatorname{sh} x$.

Exercice 19 *Ex. 16, feuille 4* —

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que : $\prod_{k=1}^n \operatorname{ch} \frac{x}{2^k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{x}$

■ Fonctions circulaires réciproques

Exercice 20 *Résultats de cours, chap. 4 (IV) —*

1. Rappeler l'expression de la dérivée de Arcsin sur $] -1, 1[$.
2. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$: $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1 - x^2}$
3. Démontrer la formule de la question 1.

Exercice 21 *Résultat de cours, chap. 4 IV.2 —*

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Exercice 22 *Exemple de cours, Chap 4, IV.2 —*

Résoudre l'équation d'inconnue x : $\operatorname{Arctan} 2x + \operatorname{Arctan} 3x = \frac{\pi}{4}$.

■ Primitives et équations différentielles

Exercice 23 *Exemple de cours, Chap 7, II.4 —* Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = f(\pi - x)$.

■ Applications

Exercice 24 — Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$

1. *Cours, chap 9–II* Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
2. *Cours, chap 9–II* Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.