

■ Exercices de cours

Aucun mais les techniques de calcul des parties 2 et 3 doivent être parfaitement maîtrisées

■ Feuille 5 : exercices traités et compétences en jeu

Compétences	Savoir-Faire	Exercices
Définir une primitive au moyen d'une intégrale	SF 1	4 10 11 13
Primitiver à vue les dérivées des composées usuelles	SF 3	1 4
Primitiver les expressions trigonométriques	SF 4	2
Primitiver les fonctions $x \mapsto e^{ax} \cos bx$ et $x \mapsto e^{ax} \sin bx$	SF 5	5 11
Primitiver $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$	SF 6 SF 7 SF 8	3 14
Effectuer une intégration par parties	SF 9	10 11
Mettre en œuvre un changement de variable	SF 10 SF 11	13 14 17

1 Primitives et intégrales

Dans toute la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Primitives

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. Une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de f (sur I) si :

- F est dérivable (sur I).
- $F' = f$.

Théorème

Si f admet une primitive F_0 sur I , alors toutes les primitives de f sont les fonctions de la forme $F_0 + k$, où $k \in \mathbb{K}$ est une constante quelconque.

Théorème

On suppose que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ admet une primitive F .

- Pour tout $b \in \mathbb{R}$, une primitive $x \mapsto f(x+b)$ est $x \mapsto F(x+b)$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, une primitive de $x \mapsto f(ax)$ est $x \mapsto \frac{1}{a}F(ax)$.

1.2 Lien avec les intégrales

Théorème : Admis (pour l'instant)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue et soit $a \in I$.

La fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur I .

Plus précisément Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, continue et soit F une primitive de f .

Pour tous $a, b \in I$: $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \underset{\text{not.}}{=} [F(t)]_a^b$

2 Méthodes directes pour le calcul de primitives

2.1 Primitives de référence : à connaître sur le bout des doigts.

Primitives des fonctions usuelles		
fonction	Une Primitive	Intervalle
$a \ (a \in \mathbb{R})$	ax	$x \in \mathbb{R}$
$x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ En particulier : avec $\alpha = -2 : \frac{1}{x^2}$ avec $\alpha = -\frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $-\frac{1}{x}$ $2\sqrt{x}$	$x \in \mathbb{R}_+^*$ (au minimum) $x \in \mathbb{R}_+^*$ ou $x \in \mathbb{R}_-^*$ $x \in \mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$x \in \mathbb{R}_+^*$ ou $x \in \mathbb{R}_-^*$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$x \ln x - x$	$x \in \mathbb{R}_+^*$
$\cos x$	$\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln \cos x $	$x \in]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\text{ où } k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan } x$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \text{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right)$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{Arcsin } x$	$x \in]-1, 1[$
$\text{ch } x$	$\text{sh } x$	$x \in \mathbb{R}$
$\text{sh } x$	$\text{ch } x$	$x \in \mathbb{R}$
$\text{th } x$	$\ln(\text{ch } x)$	$x \in \mathbb{R}$

Primitives des fonctions composées usuelles		
fonction : $u' \times (f \circ u)$	Une primitive : $F \circ u$	condition sur u
$u' u^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ avec $\alpha = -2 : \frac{u'}{u^2}$ avec $\alpha = \frac{1}{2} : \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $-\frac{1}{u}$ $\sqrt{u}$	$u > 0$ (au minimum) u ne s'annulant pas u strictement positive
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	u ne s'annulant pas
$u' e^u$	e^u	—
$u' \cos u$	$\sin u$	—
$u' \sin u$	$-\cos u$	—
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\text{Arctan } u$	—
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\text{Arcsin } u$	$ u < 1$

2.2 Linéarisation d'expressions trigonométriques

Primitives de $t \mapsto \cos^p t \sin^q t$, où $p, q \in \mathbb{N}$

La linéarisation est une méthode générale pour calculer ce type de primitives

2.3 Utilisation des complexes

Primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos bx$ et $x \mapsto e^{ax} \sin bx$

On utilise les nombres complexes, par exemple pour $x \mapsto e^{ax} \cos bx$

- On écrit $e^{ax} \cos bx = \operatorname{Re}(e^{(a+ib)x})$;
- Une primitive de $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ est $x \mapsto \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}$;
- On calcule la partie réelle de cette dernière primitive.

2.4 Primitive de $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ a deux racines réelles distinctes ($b^2 - 4ac > 0$)

En factorisant, on est ramené à primitiver $x \mapsto \frac{1}{a(x-r_1)(x-r_2)}$

- On trouve $A, B \in \mathbb{K}$ telles que pour tout $x \in I$: $\frac{1}{(x-r_1)(x-r_2)} = \frac{A}{x-r_1} + \frac{B}{x-r_2}$.
- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x-r_i}$ est $x \mapsto \ln|x-r_i|$ (pour $i = 1$ ou 2).

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ a une racine double ($b^2 - 4ac = 0$)

En factorisant, on est ramené à primitiver $x \mapsto \frac{1}{a(x-r)^2}$:

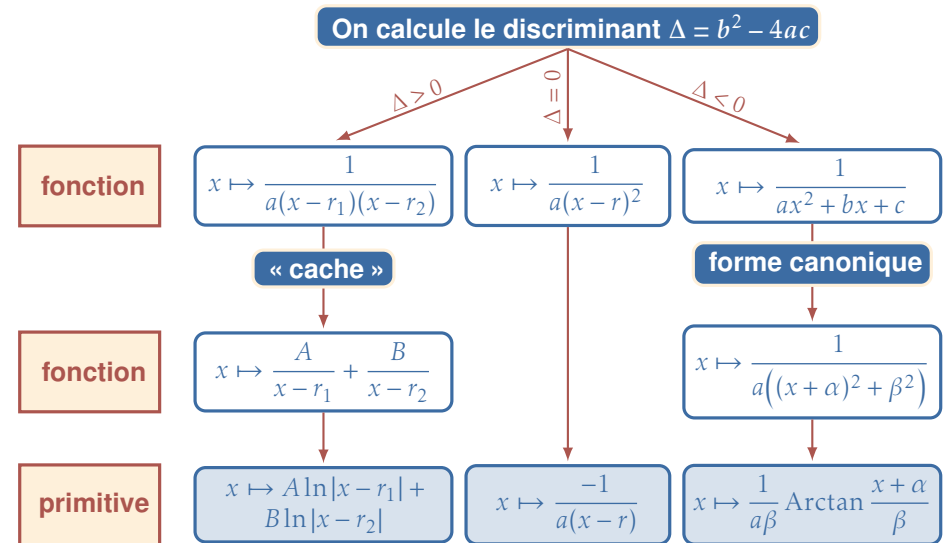
- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-r)^2}$ est $x \mapsto \frac{-1}{x-r}$

Théorème

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$ est $x \mapsto \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a}$

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ n'a pas de racine réelle ($b^2 - 4ac < 0$)

1. On écrit $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique $ax^2 + bx + c = a[(x+\alpha)^2 + \beta^2]$
2. On utilise le fait que $x \mapsto \frac{1}{(x+\alpha)^2 + \beta^2}$ est la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{\beta} \operatorname{Arctan} \frac{x+\alpha}{\beta}$



3 Techniques d'intégration

Définition

Une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si elle est dérivable sur I et si la fonction f' est continue sur I .

3.1 Intégration par parties

Théorème

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

3.2 Changement de variable

Théorème

Soit f une fonction continue sur I et soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, à valeurs dans I .
$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

Utilisation « de gauche à droite »

Utilisation du type : « Calculer $I = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ en posant $x = \varphi(t)$ »

- On calcule $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ et $dx = \varphi'(t)dt$ puis on isole $\varphi'(t)dt$ dans l'intégrale.
- On effectue trois remplacements :
 1. on remplace $f(\varphi(t))$ par $f(x)$;
 2. on remplace $\varphi'(t)dt$ par dx ;
 3. on remplace les bornes a et b en calculant leurs images $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.

Utilisation « de droite à gauche »

Utilisation du type : « Calculer $I = \int_\alpha^\beta f(x)dx$ en posant $x = \varphi(t)$ ».

- On calcule $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ et $dx = \varphi'(t)dt$
- On effectue trois remplacements :
 1. on remplace $f(x)$ par $f(\varphi(t))$;
 2. on remplace dx par $\varphi'(t)dt$;
 3. on remplace les bornes α et β en cherchant a et b tels que $\varphi(a) = \alpha$ et $\varphi(b) = \beta$.

L'adresse de la page des maths est : <https://mathieucathala.fr>