

Toutes les définitions / énoncés du cours sont à connaître précisément.

■ Exercices de cours

Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève pris en défaut de connaissance sur un des exercices de cours.

Exercice 1 Résultats de cours, chap. 4 IV.1 —

- Rappeler l'expression de la dérivée de Arcsin sur $] -1, 1[$.
- Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$: $\cos(\text{Arcsin } x) = \sqrt{1 - x^2}$
- Démontrer la formule de la question 1.

Exercice 2 Résultat de cours, chap. 4 IV.2 — Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice 3 Exemple de cours, Chap 4, IV.2 —

Résoudre l'équation $\text{Arctan } 2x + \text{Arctan } 3x = \frac{\pi}{4}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 Exercice de la feuille 3 — Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

- On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, déterminer le module de $z^k - 1$.
- On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 5 Exercice de cours, chap. 5 (I.2) — Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- Résoudre l'équation : $(z+i)^n = (z-i)^n$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
- Montrer que les solutions sont réelles et les exprimer simplement à l'aide des fonctions cosinus et sinus.

Feuille 4 : exercices traités et compétences en jeu

Compétences	Savoir-Faire	Exercices
Manipuler les fonctions puissances	SF 1	2 4 5 6 7 8
Etudier une fonction pour déterminer le nombre de solutions d'une équation	SF 10	7
Démontrer une inégalité par étude de fonction	SF 8 SF 9	8 14
Exploiter la convexité pour établir des inégalités	SF 8 SF 9	2 5 6 15
Manipuler les fonctions hyperboliques	SF 2	10 14 15 16 22
Manipuler les fonctions circulaires réciproques	SF 6 SF 7	17 20 22 23 28
Justifier qu'une fonction est bijective et justifier la dérivabilité de sa réciproque	SF 3 SF 4	Cours

Feuille 3 (fin) : exercices traités et compétences en jeu

Compétences	Savoir-Faire	Exercices
Connaître la liste des racines n^{es} de l'unité et savoir les manipuler	SF 12 SF 13	33 35
Calculer les racines n^{es} d'un complexe non nul	SF 14	31 32 34 37 43
Résoudre une équation du second degré à coefficients complexes	SF 15 SF 16 SF 17	35 38 40 41 42 43
Traduire l'orthogonalité et l'alignement	SF 19	44 46 47 48
Caractériser géométriquement une similitude directe	SF 18	49 46

FONCTIONS USUELLES

1 Fonction exponentielle, logarithme et puissances

1.1 Rappels sur l'exponentielle et le logarithme

- Rappels des propriétés des fonctions exp et ln :
dérivées, monotonie, valeurs remarquables, limites, variations, graphes.

1.2 Fonctions puissances

Définition

Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $x^\alpha \stackrel{\text{déf.}}{=} e^{\alpha \ln x}$.

⚠ **Attention** ⚠ Lorsque $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, x^α n'est pas « $\underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{\text{"}\alpha \text{ fois"}}$ »

Théorème

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
- $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$
- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
- $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$

Théorème : Dérivée

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $p_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$

• Remarques:

- Si u est une fonction dérivable et strictement positive, alors $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$.
- ⚠ **Attention** ⚠ Eviter de calculer les dérivées de fonctions du type $x \mapsto x^x$ ou $x \mapsto x^{u(x)}$ en inventant une formule (fausse).

Théorème : Variations des fonctions puissances

A connaître :

- Les variations et limites des fonctions p_α (selon le signe de α).
- Les graphes des fonctions puissances : selon que $\alpha < 0$, $0 < \alpha < 1$ ou $\alpha > 1$.
- La fonction p_α est concave si $\alpha \in [0, 1]$ et convexe sinon.

Théorème : croissances comparées

Pour tous $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\frac{e^x}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$|x|^\alpha e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

$$\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$x^\alpha |\ln x|^\beta \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

2 Fonctions hyperboliques

2.1 Cosinus et sinus hyperboliques

Définition

Les fonctions *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Théorème : Propriétés des fonctions sh et ch

1. La fonction ch est paire, la fonction sh est impaire.
2. Les fonctions sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et : $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$ et $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$.
3. $\operatorname{ch} x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\operatorname{sh} x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
4. Leurs variations sont à connaître, de même que leurs graphes.

- **Remarque.** $\operatorname{ch} x \geq 1$ pour tout réel x et $\operatorname{ch} x = 1$ ssi $x = 0$.

Théorème

Pour tout réel x : $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

2.2 Tangente hyperbolique

Définition

La fonction *tangente hyperbolique* est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

Théorème : Propriétés de th

1. La fonction th est impaire.
2. La fonction th est dérivable et : $\operatorname{th}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$.
3. $\operatorname{th} x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et $\operatorname{th} x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$.
4. Ses variations sont à connaître, ainsi que son graphe.

3 Fonction réciproque d'une bijection

- **Cadre.** • I, J sont des intervalles • $f : I \rightarrow J$ est définie sur I et à valeurs dans J .

3.1 Notions de bijection et de fonction réciproque

Définition

On dit que f est *bijection de I sur J* ou que f est *une bijection de I sur J* si tout $y \in J$ possède un unique antécédent par f .

Dans ce cas, on note f^{-1} la fonction qui à $y \in J$ associe l'antécédent de y par f . La fonction f^{-1} s'appelle la fonction réciproque de f .

- **Graphiquement.** Les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

3.2 Théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone

- **Cadre.** On suppose ici que $I = [a, b[$ avec $a < b$ (et éventuellement $b = +\infty$)

Théorème : TVI strictement monotone

Si : i) f est continue sur l'intervalle $I = [a, b[$ (b fini ou non).

ii) f est strictement croissante sur I

iii) Aux bornes : $f(a) = \alpha$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} \ell$ (finie ou non)

Alors f est bijective de $[a, b[$ sur $[\alpha, \ell[$.

- Enoncés analogues avec f strictement décroissante et/ou $I =]a, b]$, $]a, b[$ ou $[a, b]$

3.3 Calcul de f^{-1}

En pratique, on fixe $y \in J$ et on résout l'équation : $f(x) = y$ d'inconnue $x \in I$.

3.4 Dérivée d'une réciproque

Théorème : (Admis)

On suppose que :

- f est bijective de I sur J .
- f est dérivable sur I .
- f' ne s'annule pas sur I .

Alors f^{-1} est dérivable sur J et :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

4 Fonctions circulaires réciproques

4.1 Fonctions Arc sinus et Arc cosinus

Définition

Arcsin est la fonction réciproque de la restriction de $\sin$ à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

En pratique

Si $x \in [-1, 1]$, calculer $\theta = \text{Arcsin } x$ revient à trouver un réel θ tel que :
• $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ • $\sin \theta = x$.

Conséquences:

- Pour tout $x \in [-1, 1]$: $\sin(\text{Arcsin } x) = x$.
- Pour tout $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: $\text{Arcsin}(\sin x) = x$. **Mais c'est faux si $\theta \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.**

Définition

Arccos est la fonction réciproque de la restriction de $\cos$ à $[0, \pi]$.

En pratique

Si $x \in [-1, 1]$, calculer $\theta = \text{Arccos } x$ revient à trouver θ tel que :
• $\theta \in [0, \pi]$ • $\cos \theta = x$.

Conséquence.

- Pour tout $x \in [-1, 1]$: $\cos(\text{Arccos } x) = x$.
- Pour tout $\theta \in [0, \pi]$: $\text{Arccos}(\cos x) = x$. **Mais c'est faux si $\theta \notin [0, \pi]$.**

Théorème : (Admis provisoirement)

- Arcsin est continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$.
- Arccos est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$.
- Leurs variations et graphes sont à connaître.

Remarque.

La fonction Arcsin est impaire.

Théorème

Pour tout $x \in [-1, 1]$: $\cos(\text{Arcsin } x) = \sin(\text{Arccos } x) = \sqrt{1 - x^2}$

Théorème

Les fonctions Arcsin et Arccos sont dérivables sur $] -1, 1[$ et :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{et} \quad \text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

4.2 Fonction Arc tangente

Définition

Arctan est la fonction réciproque de la restriction de $\tan$ à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

En pratique

Si $x \in \mathbb{R}$, calculer $\theta = \text{Arctan } x$ revient à trouver un réel θ tel que :
• $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ • $\tan \theta = x$.

Conséquence.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\tan(\text{Arctan } x) = x$.
- Pour tout $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$: $\text{Arctan}(\tan x) = x$
Mais c'est faux si $\theta \notin]-\pi/2, \pi/2[$.

Théorème : (Admis provisoirement)

- Arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\text{Arctan } x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\frac{\pi}{2}$ et $\text{Arctan } x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$.
- Ses variations et son graphe sont à connaître.

Théorème

Arctan est impaire

Théorème

Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Théorème

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

NOMBRES COMPLEXES - NIVEAU 2

1 Racines n -ièmes dans $\mathbb{C}$

- **Cadre.** n est un entier naturel non nul.

Définition

Pour tout $Z \in \mathbb{C}^*$, une *racine n -ième* de Z est un complexe z tel que $z^n = Z$.

- **Vocabulaire.** Les racines n -ièmes de 1 sont appelées *racines n -ièmes de l'unité*.

1.1 Racines de l'unité

Théorème

Il existe exactement n racines de l'unité, ce sont les complexes $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

- **Notation.** On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

Théorème

- Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$: $\omega_k = \omega_1^k$.
- Si $n \geq 2$, la somme des racines n -ièmes de l'unité est nulle : $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$.

$$\bullet \mathbb{U}_1 = \{1\}. \quad \bullet \mathbb{U}_2 = \{1, -1\}. \quad \bullet \mathbb{U}_3 = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\right\}. \quad \bullet \mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}.$$

Définition

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Les racines 3^e de l'unité sont 1, j et j^2 et :

$$\bullet j^3 = 1 \quad \bullet j^2 = \frac{1}{j} = \bar{j} \quad \bullet 1 + j + j^2 = 0 \quad \bullet \text{Pour tout } z \in \mathbb{C} : z^2 + z + 1 = (z-j)(z-j^2).$$

1.2 Racines n -ièmes d'un complexe $Z \in \mathbb{C}^*$

Théorème

Le complexe non nul $Z = re^{i\theta}$ possède exactement n racines n -ièmes, ce sont les complexes : $z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

2 Second degré dans $\mathbb{C}$

2.1 Calcul des racines carrées sous forme algébrique

- **Objectif.** Etant donné $Z = a + ib \in \mathbb{C}^*$, on cherche à calculer les racines carrées de Z

Méthode générale pour calculer une racine carrée $z = x + iy$ de Z

La forme algébrique de z^2 étant $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$, l'égalité $z^2 = Z$ donne

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \quad (\text{parties réelles}) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (2) \quad (\text{modules}) \\ 2xy = b & (3) \quad (\text{parties imaginaires}) \end{cases}$$

- On obtient x^2 via l'opération (1) + (2).
- On obtient y^2 via l'opération (1) - (2).
- (3) permet d'accorder les signes.

2.2 Equation du second degré (E) $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients complexes

- **Cadre.** $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$ • On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le *discriminant* de l'équation

Théorème

- Si $\Delta = 0$, alors (E) a une unique solution $z_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, l'équation (E) a deux solutions distinctes : $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$ où δ est l'une quelconque des deux racines carrées de Δ .

2.3 Somme et produit des racines

- **Remarque.** Les deux racines de (E) vérifient $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Théorème

Soit $s, p \in \mathbb{C}$. Les solutions de $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ sont les racines de l'équation $z^2 - sz + p = 0$

2.4 Factorisation des polynômes : deux petits résultats

- **Cadre.** • $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ • $P : z \mapsto \sum_{k=0}^n a_k z^k$ est une fonction polynomiale
- $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P i.e. : $P(\alpha) = 0$

Théorème

Il existe une fonction polynomiale Q telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = (z - \alpha)Q(z)$$

Théorème

Si les a_k sont tous réels alors $\bar{\alpha}$ est aussi une racine de P .

3 Interprétation géométrique des complexes

3.1 Orthogonalité, alignement

Théorème

Soient A, B, M trois points d'affixes a, b, z tels que $M \neq A$ et $M \neq B$

$$\left| \frac{z-b}{z-a} \right| = \frac{MB}{MA} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) [2\pi].$$

i) A, B et M sont alignés ssi $\frac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}$.

ii) (MA) et (MB) sont perpendiculaires ssi $\frac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R}$.

3.2 Transformations du plan

Définition

Soient $b, \omega \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

- La translation de vecteur b est l'application $t : z \mapsto z + b$.
- L'homothétie de centre ω et de rapport λ est l'application $h : z \mapsto z'$ où : $z' - \omega = \lambda(z - \omega)$ i.e. $z' = \omega + \lambda(z - \omega)$.
- La rotation de centre ω et d'angle θ est l'application $r : z \mapsto z'$ où : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ i.e. $z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$.

Définition

On appelle similitude directe toute application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Théorème

Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $f : z \mapsto az + b$.

- Si $a = 1$, alors f est la translation de vecteur (d'affixe) b .
- Si $a \neq 1$, alors f possède un unique point invariant ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z' = f(z)$ vérifie : $z' - \omega = a(z - \omega)$.
On dit que f est la similitude de centre ω , de rapport $|a|$ et d'angle $\arg a$.

L'adresse de la page des maths est : <https://mathieucathala.fr>