

Toutes les définitions / énoncés du cours sont à connaître précisément.

■ Exercices de cours

Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève pris en défaut de connaissance sur un des exercices de cours.

Exercice 1 Exemple de cours chap 3, II.1 —

Trouver tous les complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que : $|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |z - 1|$.

Exercice 2 Exemple de cours chap 3, II.2 — Soient $p, q \in \mathbb{R}$. En factorisant $e^{ip} + e^{iq}$ par l'angle moitié, retrouver la formule de factorisation de $\cos p + \cos q$.

Exercice 3 Exemple de cours chap 3, II.3 — Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On pose : $C_n = \sum_{k=0}^n \cos kx$. Montrer que : $C_n = \begin{cases} \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{nx}{2} & \text{si } x \not\equiv 0[2\pi] \\ n+1 & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \end{cases}$

Exercice 4 Définition de cours chap 3, III.1 puis exercice de la feuille 3 —

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Donner la définition d'un argument de z

2. Déterminer tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $(1+i)^n$ soit réel.

Exercice 5 Exercice de cours chap 3, III — Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$.

Montrer que : $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$ avec égalité ssi $z_1, \dots, z_n$ ont même argument.

Feuille 3 (début) : exercices traités et compétences en jeu

Compétences	Savoir-Faire	Exercices
Maîtriser les règles de calcul avec le conjugué et le module	SF 1 SF 2 SF 3 SF 4 SF 5	2 3 5 6 7 11
Manipuler l'exponentielle imaginaire et en connaître les propriétés	SF 4 SF 5	21 22 30
Linéariser et « délinéariser »	SF 7 SF 8	Cours
Utiliser les complexes pour calculer des sommes trigonométriques	SF 9	Cours et 30
Recourir à la forme trigonométrique en présence de puissances	SF 10	23 24 25 26
Résoudre une équation de la forme $\exp(z) = a$	SF 11	28

1 Rappels sur $\mathbb{C}$

1.1 Structure de $\mathbb{C}$

Rappels des propriétés de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1.2 Représentation géométrique des nombres complexes

$\mathbb{C}$ est identifié au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct.

1.3 Conjugaison

Définition

On appelle *conjugué* du nombre complexe $z = x + iy$ le complexe : $\bar{z} = x - iy$
déf.

Théorème : Propriétés du conjugué

Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$ et $\overline{\bar{z}} = z$

En pratique : caractérisation des réels et des imaginaires purs

Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $z \in \mathbb{R}$ ssi $\bar{z} = z$ $z \in i\mathbb{R}$ ssi $\bar{z} = -z$

Théorème : Règles de calcul

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$:

• $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ • $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ • Si $z \neq 0$: $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$

1.4 Rappels sur le module

Définition

• Le *module* de $z = x + iy$ est le réel positif : $|z| \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$ • $|z|^2 = z\bar{z}$

Théorème : Règles de calcul avec le module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

• $|\bar{z}| = |z|$. • $|zz'| = |z| \times |z'|$. • Si $z \neq 0$: $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$. • $|z^n| = |z|^n$.

- **Remarque.** Si $z \in \mathbb{R}$, le module de z est égal à sa valeur absolue.
- **Géométriquement.** Module et longueurs, module et normes, cercles et disques.

Théorème : Inégalités triangulaires

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$: • $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ • $|z - z'| \geq ||z| - |z'||$

- **Remarque.** Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire. $|z + z'| = |z| + |z'|$ ssi $z = 0$ ou s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $z' = kz$ i.e. ssi z' est colinéaire à z et de même sens.

2 Exponentielle imaginaire

2.1 Complexes de module 1

• **Notation.** On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1 : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

• **A retenir.** Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$: $z \in \mathbb{U} \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$.

Définition

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose : $e^{i\theta} \stackrel{\text{déf.}}{=} \cos \theta + i \sin \theta$.

En particulier : $e^{i0} = e^{2i\pi} = 1$, $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{3i\frac{\pi}{2}} = -i$.

Théorème

- i) Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z| = 1 \iff$ il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.
- ii) Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$: $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' [2\pi]$.
- iii) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.
- iv) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$.

2.2 Formule de Moivre et formules d'Euler

Théorème

- 1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.
- 2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Théorème : Transformation de $1 \pm e^{i\theta}$

$$1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad 1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

2.3 Applications en trigonométrie

Utiliser Euler pour linéariser $\cos^p x \sin^q x$

- 1. On utilise les formules d'Euler $\cos^p x \sin^q x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^p \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^q$.
- 2. On développe entièrement avec la formule du binôme.
- 3. On regroupe ensuite les $e^{inx} e^{-inx}$ pour refaire apparaître $\cos nx$ ou $\sin nx$.

Utiliser Moivre pour « délinéariser » $\cos nx$

- 1. On utilise la formule de Moivre : $\cos nx = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^n)$.
- 2. On développe $(\cos x + i \sin x)^n$ par la formule du binôme.
- 3. On extrait la partie réelle.

Calculer des sommes trigonométriques

- 1. On utilise $\cos \theta = \operatorname{Re}(e^{i\theta})$ et $\sin \theta = \operatorname{Im}(e^{i\theta})$.
- 2. On utilise la linéarité de Re et Im : $\operatorname{Re}\left(\sum \# \right) = \sum \operatorname{Re}(\#)$ et $\operatorname{Im}\left(\sum \# \right) = \sum \operatorname{Im}(\#)$.

3 Forme trigonométrique

3.1 Argument d'un complexe z non nul

Définition

Un argument de $z \in \mathbb{C}^*$ est un $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$.

- **Notation.** On écrit : $\arg z \equiv \theta [2\pi]$.
- **Remarque.** Un tel θ existe car $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$.
- **Vocabulaire.** L'écriture $z = |z| e^{i\theta}$ est appelée *forme trigonométrique* de z .
- **Retenir.** Pour tous $r, r' > 0$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$: $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff r = r' \text{ et } \theta \equiv \theta' [2\pi]$.

En pratique

La forme trigonométrique se prête bien au calcul de puissances.

3.2 Exponentielle complexe

Définition

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On appelle exponentielle de z , le complexe $\exp(z) \stackrel{\text{déf.}}{=} e^x e^{iy}$. Le module de $\exp(z)$ est e^x et y en est un argument.

Théorème : Relation fonctionnelle

Pour tous complexes z et z' : $\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$.