

■ Exercices de cours

Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève pris en défaut de connaissance sur un des exercices de cours.

Exercice 1 *Exemple de cours, Chap 1, III* — Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$, $u_1 = \cos \theta$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 2 \cos \theta u_{n+1} - u_n$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \cos n\theta$.

Exercice 2 *Résultat de cours, chap. 1 (III)* —

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - \varphi).$$

2. Résoudre l'équation : $\cos x + \sin x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 *Résultat de cours, Chap 2, II. 3* — Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^n k^2$ et démontrer cette formule *sans récurrence* (connaissant la valeur de $\sum_{k=0}^n k$).

Exercice 4 *Exercice feuille 2* — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $A_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$.

Exercice 5 *Résultat de cours, Chap. 2 (III)* —

Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton dans $\mathbb{C}$.

■ Feuille 1 : exercices traités et compétences en jeu

Compétences	Savoir-Faire	Exercices
Résoudre des équations trigonométriques	SF 11 SF 10	33 34 36
Exploiter la transformation de $a \cos t + b \sin t$	SF 10	37

■ Feuille 2 : exercices traités et compétences en jeu

Compétences	Savoir-Faire	Exercices
Maîtriser les règles de calcul élémentaires avec les sommes et les produits		6 7 8 15
Mettre en œuvre des changements d'indices, télescopages et utiliser des sommes classiques	SF 1 SF 2 SF 3	1 2 3 4
Majorer une somme	SF 5	10 11
Calculer des sommes doubles en intervertissant les symboles $\sum$	SF 4	1 20 21
Manipuler les coefficients du binôme		24 25 27 28 29
Calculer des sommes par dérivation	SF 6	25

RAPPELS ET COMPLEMENT SUR LES FONCTIONS (fonctions trigonométriques)

3 Fonctions trigonométriques

■ ⚠ **Attention** ⚠ : le formulaire de trigonométrie est à connaître!!!

3.1 Rappels sur les fonctions cosinus et sinus

Théorème : Propriétés des fonctions sin et cos

- cos et sin sont deux fonctions 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- La fonction cos est paire, la fonction sin est impaire.
- Les fonctions sin et cos sont dérivables et $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

Théorème : Utilisation du cercle trigonométrique

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.
- Réciproquement pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 = 1$,
il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$

Théorème

$$\text{Soit } \theta, \varphi \in \mathbb{R} \quad \cos \theta = \cos \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \equiv \varphi[2\pi] \\ \text{ou} \\ \theta \equiv -\varphi[2\pi] \end{cases} \quad \sin \theta = \sin \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \equiv \varphi[2\pi] \\ \text{ou} \\ \theta \equiv \pi - \varphi[2\pi] \end{cases}$$

Théorème : Réduction de $a \cos x + b \sin x$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. On peut trouver $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - \varphi)$$

3.2 La fonction tangente

Définition

La fonction *tangente* est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ par : $\tan = \frac{\sin}{\cos}$.

Théorème : Propriétés de la fonction tan

- i) La fonction tangente est π -périodique sur D
- ii) La fonction tangente est impaire sur D
- iii) La fonction tangente est dérivable sur D et : $\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$.

• **Remarque.** Connaître l'allure du graphe de tan.

Théorème : Formules avec tan

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\cos a = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$$

$$\sin a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$$

SOMMES ET PRODUITS

1 Les symboles $\sum$ et $\prod$

1.1 Définitions

- **Cadre.** $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont des nombres réels ou complexes.
- **Notations.** $\sum_{k=1}^n a_k \stackrel{\text{déf.}}{=} a_1 + a_2 + \dots + a_n$ • $\prod_{k=1}^n a_k \stackrel{\text{déf.}}{=} a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$
- **Retenir.** $\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) + a_{n+1}$ • $\prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \times a_{n+1}$
- **Remarque.** On définit de même $\sum_{k=m}^n a_k$ et $\prod_{k=m}^n a_k$ pour tous $a_m, \dots, a_n$ tels que $m \leq n$.
- **Sommes/produits de termes constants.** Pour $c \in \mathbb{C}$: $\sum_{k=1}^n c = nc$ • $\prod_{k=1}^n c = c^n$

1.2 A quelle lettre a-t-on le droit pour l'indice de somme ?

i) La lettre k est une variable muette.

ii) ⚠ **Attention** ⚠ en présence de la lettre n , par exemple : $\prod_{k=1}^n k = \prod_{j=1}^n j = \prod_{\cancel{k=1}}^{\cancel{n}} \cancel{n}$

1.3 Généralisation

- **Cadre.** $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de complexes indexée par un ensemble fini I
 - $\sum_{i \in I} a_i$ désigne la somme de tous les éléments de la famille
 - $\prod_{i \in I}$ désigne le produit de tous les éléments de la famille
- **Convention des sommes et produits vides.** $\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0$ • $\prod_{i \in \emptyset} a_i = 1$

Théorème : Règles de base

$$\begin{aligned} \text{i) } \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k & \text{et} & \quad \sum_{k=1}^n (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=1}^n a_k \\ \text{ii) } \prod_{k=1}^n (a_k b_k) &= \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \times \left(\prod_{k=1}^n b_k \right) & \text{et} & \quad \prod_{k=1}^n (\lambda a_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^n a_k. \end{aligned}$$

2 Techniques de calcul

2.1 Téléscope

Théorème : Sommes et produits télescopiques

$$\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0 \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0}$$

2.2 Exemples de changements d'indice

$$\bullet \text{ Le décalage. } \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} \quad \bullet \text{ Le renversement. } \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{j=0}^n a_{n-j}$$

$$\bullet \text{ Remarque. Pour une somme indexée à partir de 1 : } \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{j=1}^n a_{n+1-j}$$

$$\text{De manière générale, pour une somme indexée à partir de } m : \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=m}^n a_{m+n-j}$$

2.3 Des sommes à connaître

Théorème

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Théorème : Sommes géométriques

$$\text{Soit } q \in \mathbb{C} \text{ et soient } m, n \in \mathbb{N} \text{ tels que } m \leq n. \\ \text{En particulier, si } q \neq 1 : \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

$$\sum_{k=m}^n q^k = \begin{cases} \frac{q^m - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ n - m + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Théorème : Factorisation de $a^n - b^n$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{C}$.

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

3 Coefficients binomiaux et formule du binôme

3.1 Coefficient binomial

■ La définition

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On définit le coefficient binomial « p parmi n », noté $\binom{n}{p}$ par :

$$\binom{n}{p} = \frac{\overbrace{n(n-1)\dots(n-p+1)}^{p \text{ facteurs}}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

- **Remarque.** Pour $p < 0$ ou $p > n$ on pose $\binom{n}{p} = 0$.

■ Formulaire

Théorème : Formules à savoir sur les coefficients binomiaux

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$:

- *Symétrie* : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- *Formule de Pascal* : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$
- Si $p \neq 0$: $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$

Théorème : Valeurs remarquables à connaître

$$\bullet \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \bullet \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad \bullet \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

3.2 Formule du binôme de Newton

Théorème : Formule du binôme

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

4 Sommes doubles

En pratique : on peut intervertir deux symboles $\sum$

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j}$$

⚠ **Attention** ⚠ au cas où les bornes dépendent des indices, par exemple :

En pratique :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}$$

L'adresse de la page des maths est : <https://mathieucathala.fr>