

Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

■ Exercice de cours sur 8 points

L'un des exercices de la liste fournie.

■ Feuille 13 - exercices traités et compétences en jeu

Compétences	Savoir-Faire	Exercices
Montrer qu'un ensemble est un groupe	SF 1	1 2 10
Exploiter les propriétés d'un groupe	SF 1	3 5 6 7
Montrer qu'une application est un morphisme	SF 2 SF 6	9 11 12
Déterminer le noyau/l'image d'un morphisme et savoir relier l'injectivité au noyau	SF 3 SF 4	9 12 20
Montrer qu'un ensemble est un anneau ou un corps	SF 5 SF 7	18 19
Déterminer les inversibles d'un anneau		18

GROUPES ET ANNEAUX

1 Lois de composition internes

- Loi de composition interne
- Associativité, commutativité
- Loi produit sur $E \times F$
- Élément neutre
- Éléments inversibles (et propriétés dans le cas d'une loi associative)

2 Groupes

2.1 Généralités

Définition

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$.

On dit que $(G, \star)$ est un groupe si :

- $\star$ est associative ;
- $(G, \star)$ possède un élément neutre ;
- Tout élément de G est inversible.

Si de plus, $\star$ est commutative, on dit que G est commutatif.

- **Remarque.** Si $(G, \star)$ et $(G', \cdot)$ sont des groupes, alors $G \times G'$ est un groupe pour la loi produit.

Définition

Soit E un ensemble non vide. Une *permutation* de E est une bijection de E sur E

- L'ensemble des permutations de E est noté S_E .
- $(S_E, \circ)$ est un groupe, d'élément neutre Id_E .

2.2 Sous-groupes

- **Cadre.** • $(G, \star)$ est un groupe • H est une partie de G .

Définition

On dit que H est un sous-groupe de G si :

- H est non vide
- H est stable par $\star$: $\forall x, y \in H, x \star y \in H$;
- H est stable par passage à l'inverse : $\forall x \in H, x^{-1} \in H$.

- **Remarque.** On note e l'élément neutre de G . Si H un sous-groupe de G : $e \in H$.

Théorème

Si H est un sous-groupe de G , alors $(H, \star)$ est un groupe.

En pratique : pour montrer que G est groupe

On peut montrer que G est un sous-groupe d'un groupe de référence.

Exemple 1 — $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe et $\mathbb{U}_n$ en est un sous groupe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2.3 Morphismes de groupes

- **Cadre.** • $(G, \cdot)$ est un groupe d'élément neutre e .
• $(G', \star)$ est un groupe d'élément neutre e' .

Définition

Une application $f : G \rightarrow G'$ est un *morphisme de groupes* si :

$$\forall x, y \in G, \quad f(x \cdot y) = f(x) \star f(y)$$

- **Vocabulaire.** On appelle *isomorphisme* de G sur G' tout morphisme de groupe bijectif de G sur G' .

- **Remarque.** Si $f : G \rightarrow G'$ est un morphisme de groupe :

$$\bullet f(e) = e' \quad \bullet \forall x \in G, \quad f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$$

Définition

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupe.

- Le *noyau* de f , noté $\text{Ker } f$, est le sous-groupe de G :

$$\text{Ker } f = \{x \in G \mid f(x) = e'\} = f^{-1}(\{e'\})$$

- L'*image* de f , notée $\text{Im } f$, est le sous-groupe de G' : $\text{Im } f = f(G) = \{f(x) ; x \in G\}$.

Théorème

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupe.

- f est injectif ssi : $\text{Ker } f = \{e\}$ • f est surjectif ssi : $\text{Im } f = G'$.

3 Anneaux

3.1 Généralités

Définition

Soit A un ensemble muni de deux lois de compositions internes $+$ et $\times$.

On dit que $(A, +, \times)$ est un *anneau* si :

- i) $(A, +)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre noté 0_A .
- ii) La loi $\times$:
 - est associative
 - possède un élément neutre noté 1_A .
- iii) $\times$ est distributive sur $+$.

Si de plus, $\times$ est commutative, on dit que l'anneau est *commutatif*.

Définition

Un *corps* est un anneau commutatif, non réduit à $\{0\}$ et dans lequel tout élément autre que 0 est inversible.

Théorème : Règles de calcul

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et soient $a, b \in A$. Si $a \times b = b \times a$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\bullet a^n - b^n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-1-k} \quad \bullet (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$$

Définition

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On note $U(A)$ l'ensemble des éléments de A inversibles pour $\times$. $(U(A), \times)$ est un groupe.

3.2 Sous-anneaux

- **Cadre.** • $(A, +, \times)$ est un anneau. • B est une partie de A .

Définition

On dit que B est un *sous-anneau* de A si :

- i) $1_A \in B$
- ii) B est un sous-groupe de $(A, +)$.
- iii) B stable par $\times$: $\forall x, y \in B, x \times y \in B$

3.3 Morphisme d'anneaux

- **Cadre.** $(A, +, \cdot)$ et $(B, +, \times)$ sont des anneaux¹

Définition

Une application $f : A \rightarrow B$ est un *morphisme d'anneaux* si :

- i) $f(1_A) = 1_B$
- ii) $\forall x, y \in A, f(x+y) = f(x)+f(y)$
- iii) $\forall x, y \in A, f(x \cdot y) = f(x) \times f(y)$

- **Remarque.** Si $f : A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneau, alors f est un morphisme de groupes entre $(A, +)$ et $(B, +)$. En particulier : f est injectif ssi $\text{Ker } f = \{0_A\}$.

- **Vocabulaire.** Un *isomorphisme d'anneaux* est un morphisme d'anneau bijectif.

3.4 Anneaux intègres

Définition

Un anneau commutatif, non nul $(A, +, \times)$ est *intègre* si pour tous $x, y \in A$:

$$x \times y = 0 \implies x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0$$

- **Remarque.** Dans un anneau intègre il est licite de *simplifier* une égalité par un élément *non nul* : si $x \neq 0_A$, l'égalité : $x \times y = x \times z$ impose : $y = z$

L'adresse de la page des maths est : <https://mathieucathala.fr>

1. on note abusivement par le même symbole les additions de A et B