

Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

- **Cadre.** • I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point • a est un point de I • $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction.

Exercice 1 *Résultat de cours, chap 14.1, I —*

Enoncer et démontrer le théorème de Rolle.

Exercice 2 *Résultat de cours chap 14.0,II-3 et dém. de cours, chap 14.1,I-2 —*

- Enoncer le théorème de la limite de la dérivée.
Démontrer ce résultat en utilisant l'égalité des accroissements finis.
- Prouver que l'implication : $(f \text{ est dérivable en } a) \implies (f' \text{ admet une limite finie en } a)$ est fausse. on pourra considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ pour tout } x > 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Exercice 3 *Exo de cours, chap 14.1,I-1 —* Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ ($n \geq 1$). On suppose que f s'annule en au moins $n+1$ points distincts. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.

Exercice 4 *Résultat et démonstration de cours, chap 14.1,I-2 et ex. feuille 12 —*

- Enoncer et démontrer le théorème de l'égalité des accroissements finis.
- Etudier la limite en $+\infty$ de $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 5 *Dém. de cours, chap 14.1, I-3 —* Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I . Montrer que f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I .

■ **Feuille 12 - exercices traités et compétences en jeu**

Compétences	Savoir-Faire	Exercices
Justifier la dérivabilité d'une fonction concrète en un point ou sur un intervalle	SF 1	3 4 6 7
Justifier la dérivabilité ou le caractère $\mathcal{C}^n$ d'une fonction réciproque	SF 4	9
Calculer les dérivées successives d'une fonction	SF 2	15 16 17 20
Exploiter le théorème de la limite de la dérivée pour montrer qu'un prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$	SF 3 SF 5	23 24
Exploiter une hypothèse de dérivabilité pour majorer/minorer une fonction réelle		10 11 43
Utiliser le théorème de Rolle ou l'égalité des accroissements finis pour montrer l'existence d'une solution à une équation	SF 6	25 26 31 37 44
Appliquer le théorème de Rolle à une fonction auxiliaire « rusée » pour établir une égalité	SF 6	32 34
Utiliser l'égalité des accroissements finis pour établir un encadrement	SF 8	38 39 40 41 42

■ **Anciennes compétences, toujours en jeu**

Compétences	Savoir-Faire	Exercices
Etudier la limite d'une suite « $u_{n+1} = f(u_n)$ » lorsque f est lipschitzienne de rapport $k \in [0, 1[$	SF 10	
Exploiter la convexité pour établir des inégalités		11
Montrer qu'une fonction est convexe		

DERIVABILITE

1 Dérivée en un point

1.1 Définition

Définition

f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a , $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ possède une limite finie quand x tend vers a . En ce cas on pose :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

- **Vocabulaire et notation.** On dit que f est *dérivable à droite en a* si son taux d'accroissement en a possède une limite finie à droite en a . On pose alors : $f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. On définit de même la dérivée à gauche $f'_g(a)$.

Théorème

Supposons que a soit un point intérieur à I . Dans ce cas f est dérivable en a ssi f est dérivable à gauche et à droite en a et si $f'_d(a) = f'_g(a)$

1.2 Dérivabilité et continuité

Si f est dérivable en a pour tout $x \in I$: $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$
où $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

Théorème

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

- ⚠ **Attention** ⚠ La réciproque est fausse.

1.3 Extremum local

Définition

f possède un maximum local en a si, au voisinage de a , $f(x) \leq f(a)$

Théorème

On suppose que a est un point intérieur à I et que f est dérivable en a .
Si f possède un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

- ⚠ **Attention** ⚠ La réciproque est fausse.
- **Vocabulaire.** Un $a \in I$ en lequel f est dérivable et $f'(a) = 0$ est un *point critique* de f

2 Justifier la dérivabilité

2.1 Opération sur les dérivées

Théorème : Opérations algébriques

Soient u, v deux fonction dérivables en a et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

1. **Linéarité** : $\lambda u + \mu v$ est dérivable en a et : $(\lambda u + \mu v)'(a) = \lambda u'(a) + \mu v'(a)$,
2. **Produit** : uv est dérivable en a et : $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.
3. **Quotient** : Si $v(a) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable en a et $\left(\frac{u}{v}\right)'(a) = \frac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{v^2(a)}$

Théorème : Composition

Soient $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : J \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose u à valeurs dans J . Si u est dérivable en a et si v est dérivable en $u(a)$ alors $v \circ u$ est dérivable en a et :

$$(v \circ u)'(a) = u'(a) \times v'(u(a))$$

- **Cas particuliers à savoir** : Les dérivées des composées usuelles $u^\alpha, e^u, \ln(u), \dots$

En pratique :

Il faut savoir justifier proprement la dérivabilité d'une composée.

2.2 Dérivation des fonctions réciproques

Théorème : Réciproque

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue et strictement monotone sur I . On pose $b = f(a)$. On suppose que f dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en b et :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

2.3 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème : Théorème de la limite de la dérivée

On suppose que : • f est continue sur $[a, b[$ • f est dérivable sur $]a, b[$

Si $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$ (finie ou non), alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

- **Remarque**. Même conclusion si :

• f est continue sur $]a, b]$ • f est dérivable sur $]a, b[$ • $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = \ell$

- **Remarque**. Même conclusion si :

• f est continue sur I • f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ • $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell$

- **Conséquence**. Lorsque ℓ est finie, f est dérivable en a et f' est continue en a

3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

- **Notation**. On définit par récurrence les *dérivées successives* de f :

• $f^{(0)} = f$ • Si f est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est dérivable, $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si :

- f est n fois dérivable sur I • La fonction $f^{(n)}$ est continue sur I

- **Vocabulaire**. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou encore si f est indéfiniment dérivable.

3.1 Opérations sur les fonction de classe $\mathcal{C}^n$

Théorème : Opérations algébriques version $\mathcal{C}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- **Combinaisons linéaires**. $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
- **Formule de Leibniz** fg est de classe $\mathcal{C}^n$ et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$
- **Quotient**. Si g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

Théorème : Composition version $\mathcal{C}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si : i) v est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J ii) u est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , à valeurs dans J alors $v \circ u$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I

Théorème : Réciproque version $\mathcal{C}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si :

- i) f est une bijection de I sur J
 - ii) f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I
 - iii) f' NE S'ANNULE PAS SUR I
- alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J .

3.2 Variante $\mathcal{C}^1$ du théorème de la limite de la dérivée

En pratique : montrer que f se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur I

- On justifie que f est $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ par opérations.
- On étudie $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ pour prolonger f par continuité en a .
- On étudie $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x)$ pour appliquer le théorème de la limite de la dérivée et ainsi montrer que f est dérivable en a et que f' est continue en a .

ACCROISSEMENTS FINIS

1 Rolle et égalité des accroissements finis

1.1 Théorème de Rolle

Théorème

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que :

- i) f est continue sur $[a, b]$.
 - ii) f est dérivable sur $]a, b[$.
 - iii) $f(a) = f(b)$.
- Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

1.2 Égalité des accroissements finis

Théorème

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que :

- i) f est continue sur $[a, b]$.
- ii) f est dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

- **Graphiquement.** $\mathcal{C}_f$ a une tangente parallèle à la corde reliant $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$

1.3 Variations et convexité d'une fonction f dérivable sur I

- **Cadre.** $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I .

Démonstration des résultats suivants (précédemment admis) :

- f est croissante sur I ssi $f' \geq 0$ sur I .
- f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I .

Théorème

f est strictement croissante si et seulement si :

- i) $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$,
- ii) f' n'est nulle sur aucun intervalle $[a, b]$ avec $a < b$.

- **Remarque.** Le théorème s'applique en particulier si :
- f' ne s'annule jamais • f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois

2 Inégalité des accroissements finis

2.1 Inégalité des accroissements finis

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur I .

On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$.

Alors : $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

On dit dans ce cas que la fonction f est k -lipschitzienne.

2.2 Application à l'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

- **But.** Montrer que la suite (u_n) converge vers un point fixe α de la fonction f .
- **Hypothèse fondamentale.** On trouve $k \in]0, 1[$ tel que : $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$.

En pratique : les étapes clés pour montrer que $u_n \rightarrow \alpha$

- **Application de l'IAF.** Pour tout n , $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq k|u_n - \alpha|$
c'est à dire : $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$
- **Par récurrence sur n .** $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$.
- **Théorème d'encadrement.** Puisque $k \in [0, 1[$: $k^n \rightarrow 0$ et donc : $|u_n - \alpha| \rightarrow 0$
i.e. $u_n \rightarrow \alpha$.

L'adresse de la page des maths est : <https://mathieucathala.fr>