

Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

■ Exercice de cours

Exercice 1 *Résultat de cours, chapitre 13.0 – II* — Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$. Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue en a .
2. Pour toute suite (u_n) d'éléments de I telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a : f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$

Exercice 2 *Résultat de cours, chapitre 13.0 – II* — Montrer que les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tous $x, y \in \mathbb{R} : f(x + y) = f(x) + f(y)$ sont les fonctions linéaires *i.e.* les fonctions de la forme $x \mapsto ax$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 *Résultat de cours et exemple de cours, chapitre 13.1 – II.1* —

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $[0, 1]$.
Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 4 *Exercice de cours, chapitre 13.0 – III* — On suppose f convexe sur $]a, b[$. Soit $c \in]a, b[$. Montrer que f est continue en c .

Exercice 5 *Exemple de cours, chapitre 13.1 – II.3 et exercice 1 feuille 9-bis* —

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note f_n la fonction $x \mapsto x^n \ln x - 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que l'équation $x^n \ln x = 1$ possède une unique solution x_n dans $[1, +\infty[$.
2. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.

■ Feuille 11 - exercices traités et compétences en jeu

Compétences	Savoir-Faire	Exercices
Étudier la limite d'une fonction par encadrement ou en utilisant les règles opératoires	SF 1 SF 2	2 3 4 6
Montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point	SF 3	4 5
Exploiter la définition de la limite pour majorer/minorer une fonction réelle	SF 7	1
Justifier la continuité d'une fonction concrète en un point ou sur un intervalle et étudier ses éventuels prolongements par continuité	SF 4 SF 5 SF 6	8 9
Exploiter une hypothèse de continuité ponctuelle dans un cadre abstrait	SF 7 SF 8	15 16 17 18 19
Exploiter une hypothèse de continuité globale dans un cadre abstrait	SF 9	Cours et 22
Utiliser les théorèmes de continuité globale pour montrer l'existence/l'unicité des solutions d'une équation	SF 10 SF 11	23 24 25 26
Recourir au théorème des bornes atteintes pour établir des inégalités	SF 12	29 30 32

LIMITE D'UNE FONCTION

Dans ce chapitre, I est un intervalle non vide et non réduit à un point, a est un point de I ou l'une de ses extrémités, f est une fonction réelle définie sur $\mathcal{D}_f = I$ ou $I \setminus \{a\}$.

1 Définition de la limite d'une fonction

1.1 Limite en un point (a est fini)

Définition

- On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en a si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f \cap [a - \alpha, a + \alpha], |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$
- f admet $-\infty$ pour limite en a si
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f \cap [a - \alpha, a + \alpha], f(x) \leq A.$$

1.2 Limites à l'infini ($a = \pm\infty$)

Définition

- On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en $+\infty$ si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f \cap [A, +\infty[, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$
- On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ si
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]-\infty, B], f(x) \geq A.$$

1.3 Premières propriétés

Théorème

Si f admet une limite finie en a , alors f est bornée au voisinage de a .

Théorème

Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell > 0$, alors f est strictement positive au voisinage de a .

Théorème

Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ et si g est bornée au voisinage de a , alors : $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

1.4 Demi-limites

- Définitions des limites à droite et à gauche en un point a intérieur à I .
- Remarque.** f peut admettre en a des demi-limites autres que $f(a)$.

Théorème : Limite $\leftrightarrow$ Limites à droite et à gauche

- Si $a \notin \mathcal{D}_f$ alors f admet une limite en a si et seulement si f admet une limite à gauche et à droite en a ET $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.
- Si $a \in \mathcal{D}_f$ alors f admet une limite en a si et seulement si f admet une limite à gauche et à droite en a ET $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \boxed{f(a)}$.

2 Continuité en un point

2.1 Définition de la continuité

- Cadre.** $\mathcal{D}_f = I$ i.e. f est définie en a

Définition

- f est continue en a si : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.
- f est continue à gauche (resp. à droite) si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} f(a)$ (resp. $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} f(a)$).

Théorème

Supposons que a soit un point intérieur à I .
Dans ce cas f est continue en a ssi f est continue à gauche et à droite en a

2.2 Prolongement par continuité

- Cadre.** $\mathcal{D}_f = I \setminus \{a\}$ (i.e. f n'est pas définie en a).

Définition

f est prolongeable par continuité en a si f admet une limite finie ℓ en a .

- Vocabulaire.** On note $\tilde{f}$ définie sur I par :

$$\forall x \in I, \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

- Par construction la fonction $\tilde{f}$ est continue en a .
- $\tilde{f}$ est le prolongement par continuité de f en a

2.3 Caractérisation séquentielle de la continuité

- **Cadre.** $\mathcal{D}_f = I$ (f est définie en a).

Théorème

Il y a équivalence entre :

- i) f est continue en a
- ii) Pour toute suite (u_n) d'éléments de I telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$: $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$

- **Conséquence.** Justifie le critère « $\ell = f(\ell)$ » pour les suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

3 Existence et/ou calcul de limites

3.1 Opérations algébriques sur les limites (cf suites)

3.2 Composition de limites

Théorème : Fonctions et suites

Pour a, ℓ finis ou non, il y a équivalence entre

1. $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$
2. Pour toute suite (u_n) d'éléments $\mathcal{D}_f$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ on a $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

En pratique : pour montrer que f n'admet pas de limite en a

On peut construire deux suites u, v telles que :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n)$.

Théorème : Fonctions et fonctions

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs dans J et soit $g : J \rightarrow \mathbb{R}$.

Si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell$ alors : $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ ($a, b, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$)

3.3 Limites et inégalités larges

Théorème : Passages aux limites dans les inégalités larges

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que :

- i) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_2$
- ii) Au voisinage de a : $f(x) \leq g(x)$,
alors : $\ell_1 \leq \ell_2$

3.4 Théorèmes pour prouver l'existence de limites

Théorème : Limite par encadrement

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que :

- i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$
- ii) Au voisinage de a : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
alors : $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Théorème : majoration / minoration

On suppose qu'au voisinage de a : $f(x) \leq g(x)$.

- Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$, alors $g(x)$ tend vers $+\infty$ en a .
- Si $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$, alors $f(x)$ tend vers $-\infty$ en a .

Théorème : Théorème de la limite monotone (cas croissante)

On suppose que f est croissante sur $]a, b[$:

- Si f est majorée, alors f admet en b^- une limite finie ℓ
- Si f n'est pas majorée, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b^-} +\infty$.

- Enoncés analogues avec f décroissante et/ ou la limite en a .

- **Conséquence.** En tout $c \in]a, b[$, f a des demi limites finies et $\lim_{c^-} f \leq f(c) \leq \lim_{c^+} f$

CONTINUE EN SUR UN INTERVALLE

1 Justifier la continuité de f sur l'intervalle I

En pratique : on combine deux ingrédients

- *Ingrédient n° 1.* La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues (et composables) sont des fonctions continues sur I
- *Ingrédient n° 2.* La continuité des fonctions usuelles sur leur ensemble de définition.

2 Trois grands théorèmes de continuité

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème

On suppose $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I . Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Sur $[a, b]$, f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$: pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

- **Remarque.** Le TVI assure que si I est un intervalle, alors $f(I)$ est un intervalle.

Théorème : TVI strictement monotone

Si :
i) f est continue sur $I = [a, b[$ (b fini ou non).
ii) f est strictement croissante sur I
iii) Aux bornes : $f(a) = \alpha$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} \ell$ (finie ou non)
Alors f est bijective de $[a, b[$ sur $[\alpha, \ell[$.

- Enoncés analogues avec f strictement décroissante et/ou $I =]a, b]$, $]a, b[$ ou $[a, b]$

2.2 Fonction continue sur un segment

Théorème

- Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a, b]$ alors f est bornée et atteint ses bornes.
- Autrement dit f possède sur $[a, b]$ un maximum et un minimum :
 $f([a, b]) = [m, M]$ où : $m = \min_{[a, b]} f$ et $M = \max_{[a, b]} f$

❖ Attention ❖ $f([a, b]) \neq [f(a), f(b)]$

2.3 Continuité d'une réciproque

Théorème

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I et injective alors f est strictement monotone

Théorème : Continuité des fonctions réciproques

On suppose $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur l'intervalle I . On sait que f est bijective de I sur l'intervalle $J = f(I)$.

1. f^{-1} est strictement monotone sur J de même sens que f .
2. f^{-1} est continue sur J .

L'adresse de la page des maths est : <https://mathieucathala.fr>