

Toutes les définitions / énoncés du cours sont à connaître précisément.

## ■ Exercice de cours

**Exercice 1** *Cours, chap 12, I* — Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

- Donner la définition «  $u$  est convergente »
- Démontrer la propriété d'unicité de la limite.

**Exercice 2** *Cours, chap 12, I* — Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , convergente. Montrer que  $u$  est bornée

**Exercice 3** *Ex. de cours, chap 12, II.3* —

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ . Etudier la nature de la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**Exercice 4** *Exercice feuille 9 bis* — On considère une suite  $u$  strictement positive. On suppose que la suite  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  converge vers un réel  $k < 1$ . Montrer que  $u_n \rightarrow 0$ .

**Exercice 5** *Ex. de cours, chap 12, IV* — Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , croissante et majorée. Démontrer que  $u$  converge.

**Exercice 6** *Cours, chap 12, IV* — Soit  $A$  est une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$  et  $M$  un majorant de  $A$ . Démontrer l'équivalence entre :

- $M = \sup A$
- Il existe une suite  $(a_n)$  d'éléments de  $A$  telle que  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$ .

## ■ Feuille 9 : exercices traités et compétences en jeu

| Compétences                                                                          | Savoir-Faire   | Exercices      |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----------------|----------------|
| Reconnaître et expliciter le terme général d'une suite arithmético-géométrique       | SF 1           | 6              |
| Reconnaître et expliciter le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 | SF 2           | 1 2 3 4        |
| Etudier une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$                                      | SF 11          | 30 31 32       |
| Maîtriser la notion de suites adjacentes                                             | SF 8 SF 4      | 27 29          |
| Montrer la convergence à l'aide du théorème de la limite monotone                    | SF 3 SF 4 SF 6 | 19 20 21 23 26 |
| Etudier la limite d'une suite à l'aide du théorème d'encadrement                     | SF 3 SF 7      | 14 16 17       |
| Utiliser les règles opératoires sur les limites                                      | SF 5 SF 7      | 10 11          |

## ■ Feuille 9-bis : exercices traités et compétences

| Compétences                                                                                 | Savoir-Faire | Exercices |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|-----------|
| Exploiter la définition de la limite pour majorer/minorer une suite réelle                  | SF 7 SF 3    | 1 2 3     |
| Montrer qu'une suite converge en revenant à la définition de la limite                      | SF 7         | 4 5       |
| Utiliser les sous-suites pour montrer qu'une suite n'a pas de limite                        | SF 9         | 10 11 12  |
| Utiliser les sous-suites pour montrer qu'une suite possède une limite                       | SF 10        | 13 14 15  |
| Utiliser une suite définie de manière implicite                                             | SF 12        | 17 18     |
| Utiliser les suites pour montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure | SF 13        | 20 22 24  |
| Manipuler la définition de la borne supérieure                                              | SF 13        | 19        |
| Montrer/exploiter la densité d'une partie de $\mathbb{R}$                                   | SF 14        | 25 26     |

## SUITES - niveau 1

Tout le chapitre reste au programme.

## SUITES - niveau 2

### 1 Limite d'une suite

#### 1.1 Suites convergentes

##### Définition

Une suite  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est *convergente* s'il existe  $\ell \in \mathbb{R}$  ayant la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

#### 1.2 Propriétés des suites convergentes

##### Théorème

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

- Dans le cas où  $u$  est convergente le réel  $\ell$  est unique appelée limite de  $u$  et noté  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
- Dans le cas contraire, on dit que  $u$  est *divergente*.

##### Théorème

Toute suite convergente est bornée.

⚠ **Attention** ⚠ Réciproque fautive :  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée mais ne converge pas

##### Théorème

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Si  $u$  converge vers  $\ell > 0$ , alors  $u_n > 0$  à partir d'un certain rang.

#### 1.3 Suites tendant vers l'infini

##### Définition

- Une suite  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  si :  
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq A$$
- Une suite  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  tend vers  $-\infty$  si :  
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq A$$

##### ⚠ Attention ⚠

- Diverger ne signifie pas tendre vers  $\pm\infty$ . Une suite diverge si elle admet une limite infinie ou si elle n'admet pas de limite.
- Une suite qui n'est pas bornée ne tend pas forcément vers  $\pm\infty$ . Par exemple la suite  $((-1)^n n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas bornée mais n'admet pas de limite.

### 2 Suites extraites

#### 2.1 Définition

##### Définition

Soient  $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . On dit que  $v$  est une *sous-suite* ou *suite extraite* de  $u$  s'il existe  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , strictement croissante, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$$

##### Théorème

Soit  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , strictement croissante. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\varphi(n) \geq n$ .

#### 2.2 Limite et suites extraites

- **Cadre.** •  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  •  $\ell \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ .

##### Théorème

Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ , alors toutes les sous-suites de  $u$  tendent vers  $\ell$ .

##### En pratique : pour prouver qu'une suite n'a pas de limite

Si on peut trouver deux sous-suites de  $u$  qui possèdent des limites différentes, alors  $u$  n'a pas de limite.

##### Théorème

Si :  $u_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$  et  $u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$  alors :  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ .

#### 2.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

##### Théorème

Toute suite bornée possède une sous-suite convergente.

### 3 Extensions aux suites complexes

Extension des résultats du chapitre dans le cas d'une suite à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

### 4 Borne supérieure/inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$

- **Cadre.** • On considère une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$ .

#### 4.1 Vocabulaire lié à l'ordre

Partie majorée/minorée/bornée, majorant, minorant, plus grand/petit élément

##### Théorème : Cas des parties de $\mathbb{N}$ (admis)

- i) Toute partie non vide de  $\mathbb{N}$  possède un plus petit élément
- ii) Toute partie non vide et majorée de  $\mathbb{N}$  possède un plus grand élément

#### 4.2 Borne supérieure/inférieure

##### Définition

- La borne supérieure de  $A$  est, s'il existe, le plus petit des majorants de  $A$ .
- La borne inférieure de  $A$  est, s'il existe, le plus grand des minorants de  $A$ .
- **Remarque.** Si  $A$  possède un plus grand élément  $M$ , alors  $A$  possède une borne supérieure et  $M = \sup A$

##### Théorème : Propriété de la borne supérieure

- Toute partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$  possède une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de  $\mathbb{R}$  possède une borne inférieure.

##### Théorème : Caractérisation des intervalles

Soit  $I$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . Il y a équivalence entre :

- i)  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .
- ii) Pour tous  $x, y \in I$  tels que  $x \leq y$  :  $[x, y] \subset I$ .

#### 4.3 Borne supérieure et suites

##### Théorème

On suppose  $A$  non vide et majorée. Soit  $M$  un majorant de  $A$ . Sont équivalentes :

- i)  $M = \sup A$
- ii) Il existe une suite  $(a_n)$  d'éléments de  $A$  telle que  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$ .

##### Utiliser les suites pour montrer que $M = \sup A$

- On montre que  $M$  majore  $A$ .
- On construit une suite  $(a_n)$  d'éléments de  $A$  telle que  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$ .

### 5 Approximations d'un nombre réel

#### 5.1 Approximation décimale

##### Définition

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$

- L'approximation décimale de  $x$  à  $10^{-n}$  près par défaut est le décimal :  $y_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$
- L'approximation décimale de  $x$  à  $10^{-n}$  près par excès est le décimal :  $z_n = y_n + \frac{1}{10^n}$

##### Théorème

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\bullet y_n \leq x < z_n \quad \bullet z_n - y_n = \frac{1}{10^n} \quad \bullet 0 \leq z_n - x \leq \frac{1}{10^n} \quad \text{et} \quad 0 \leq x - y_n \leq \frac{1}{10^n}$$

- **Conséquence.** Les suites  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers  $x$ .
- **Remarque.** Les suites  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes

#### 5.2 Approximation par des rationnels

##### Théorème

1. Tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.
2. Tout intervalle ouvert non vide possède un rationnel i.e. :  
pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$  :  $\mathbb{Q} \cap ]a, b[ \neq \emptyset$ .

##### Théorème

Tout nombre réel est limite d'une suite d'irrationnels.

##### Théorème

Soit  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Il y a équivalence entre :

1. Tout réel est limite d'une suite d'éléments de  $A$ .
2. Tout intervalle ouvert non vide possède un élément de  $A$ .

On dit alors que  $A$  est *dense* dans  $\mathbb{R}$ .