

Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

■ Exercices de cours

Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un étudiant pris en défaut de connaissance sur un des exercices de cours.

Exercice 1 *Exercice de la feuille 0* — Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

Exercice 2 *Théorème et exemple de cours, chap 0 (II)* —

1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable, telle que f' est croissante sur I . Montrer que pour tous $a, x \in I$: $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$. Interpréter graphiquement cette inégalité.
2. Etablir : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$.

Exercice 3 *Exemple de cours, chap. 0 (III)* —

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $|\sin nx| \leq n |\sin x|$.

Exercice 4 *Exemple de cours, chap. 1 (I)* — Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x) - f(y) = (x-y)f'\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Exercice 5 *Théorème de cours, chap 1 (II)* — Montrer que si f est convexe sur un intervalle I alors pour tout $a \in I$, la fonction $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$ (On ne demande pas ici de démontrer l'implication réciproque)

■ Feuille 0 : exercices traités et compétences en jeu

Compétences	Savoir-Faire	Exercices
Majorer une fraction de réels positifs	SF 1	35 37
Résoudre une équation en présence de quotients, racines carrées ou valeurs absolues	SF 2 SF 3 SF 4	7 8 18
Etablir une égalité du type $\lfloor x \rfloor = n$ pour certains $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$	SF 6	20 21 22 25
Démontrer une inégalité par substitution à partir d'une autre	SF 5	13 14 15
Démontrer une inégalité par étude de fonction	SF 7 SF 8	29 30
Raisonner par récurrence pour montrer une inégalité	SF 9 SF 10 SF 11	1 2 3 4
Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour établir un encadrement	SF 12	35 36
Etudier la limite d'une suite « $u_{n+1} = f(u_n)$ » lorsque f est lipschitzienne de rapport $k \in [0, 1[$	SF 13 SF 14	37

■ Feuille 1 : exercices traités et compétences en jeu

Compétences	Savoir-Faire	Exercices
Trouver l'ensemble de définition, justifier la dérivabilité et dériver une fonction composée	SF 3 SF 5 SF 6	1 18 21
Etudier la monotonie d'une fonction		6 17 18
Etudier une fonction pour déterminer le nombre de solutions d'une équation	SF 7	13 14 15
Exploiter la convexité pour établir des inégalités	SF 1 SF 2 SF 9	18 19 21 26 32
Montrer qu'une fonction est convexe	SF 8	18 19 21 23 24

RAPPELS SUR LES INEGALITES

1 Manipuler des inégalités

1.1 Inégalités et opérations

Théorème : Inégalités et opérations

Soient $a, b, c, d, k \in \mathbb{R}$.

- **Addition** : si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.
- **Multiplication** :
 - Par un réel positif. Si $a \leq b$ et $k \geq 0$, alors $ka \leq kb$.
 - Par un réel négatif. Si $a \leq b$ et $k \leq 0$, alors $ka \geq kb$.
 - D'inégalités positives. Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $0 \leq ac \leq bd$.
- **Inverse**. Si $0 < a \leq b$ alors $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

1.2 Valeur absolue

Définition

- **Définition**. On définit la *valeur absolue* d'un réel x par $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$
- **Inégalités sur $|x|$** . Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
 - $|x| \geq 0$ et $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
 - $-|x| \leq x \leq |x|$.
- **Règles de calcul** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
 - $|-x| = |x|$
 - $|xy| = |x||y|$
- **Inégalité triangulaire**. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Théorème : Interprétation géométrique

Soient $x, a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$:

- $|x| \leq r$ si et seulement si $-r \leq x \leq r$.
- $|x - a|$ est la distance entre x et a : $|x - a| \leq r$ ssi $x \in [a - r, a + r]$

- **Lien avec la racine carrée**. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x^2} = |x|$,

et pour tout $a \geq 0$: $x^2 = a$ ssi $|x| = \sqrt{a}$ $x^2 \leq a$ ssi $|x| \leq \sqrt{a}$

1.3 Partie entière d'un réel x

Définition

- La *partie entière* de x est le plus grand entier inférieur ou égal à x .
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, $n = \lfloor x \rfloor$ ssi :
$$\begin{cases} n \leq x \\ n + 1 > x \end{cases}$$

- **Inégalités à retenir**. $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

2 Fonctions et inégalités

2.1 Fonctions monotones

- **Cadre**. D est une partie de $\mathbb{R}$ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur D

Définition

- f est *croissante* sur D si pour tous $x, y \in D$: $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.
- f est *strictement croissante* sur D si pour tous $x, y \in D$: $x < y \implies f(x) < f(y)$.
- f est *décroissante* sur D si pour tous $x, y \in D$: $x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$.
- f est *strictement décroissante* sur D si pour tous $x, y \in D$: $x < y \implies f(x) > f(y)$.

Théorème

Si f et g sont croissantes sur D , alors $f + g$ est croissante sur D

2.2 Fonctions majorées, minorées, bornées

- **Cadre**. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur D .

Définition

- f est *majorée* si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in D, f(x) \leq M$$
- f est *minorée* si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in D, f(x) \geq m$$
- f est *bornée* si elle est majorée et minorée, c'est équivalent à :
$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in D, |f(x)| \leq M$$

Définition

- f possède un *maximum* en a si :
$$\forall x \in D, f(x) \leq f(a)$$

2.3 Etudier une fonction pour établir une inégalité

Etablir une inégalité du type « $\forall x \in D, f(x) \leq g(x)$ »

- *Méthode 1.* On peut étudier la fonction $f - g$ sur l'ensemble D .
- *Méthode 2.* Lorsque f est dérivable et convexe i.e. lorsque f' est croissante :
 - On peut utiliser l'inégalité des tangentes : $\forall a, x \in I, f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$
 - On peut utiliser l'inégalité des cordes :
pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$ et tout $x \in [a, b]$: $f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

3 Raisonnements par récurrence

Retour sur le raisonnement par récurrence, ici mis en œuvre dans le contexte de la démonstration d'inégalités :

- Le principe de récurrence.
- Variantes : récurrence double, récurrence forte.

4 Inégalité des accroissements finis

4.1 Inégalité des accroissements finis

Théorème : (Admis provisoirement)

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I .
On suppose f' bornée sur I i.e. il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$$

Alors :

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Définition

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $k \geq 0$. On dit que f est *k-lipschitzienne* sur D si :

$$\forall x, y \in D, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

4.2 Application à l'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

- **But.** Montrer que la suite (u_n) converge vers un point fixe α de la fonction f .
- **Hypothèse fondamentale.** On trouve $k \in]0, 1[$ tel que : $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$.

En pratique : les étapes clés pour montrer que $u_n \rightarrow \alpha$

- *Application de l'IAF.*
Pour tout n , $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq k|u_n - \alpha|$ c'est à dire : $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$
- *Par récurrence sur n :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$$
- *Théorème d'encadrement.* Puisque $k \in [0, 1[$: $k^n \rightarrow 0$ et donc :
$$|u_n - \alpha| \rightarrow 0 \quad \text{i.e.} \quad u_n \rightarrow \alpha$$

RAPPELS SUR LES FONCTIONS

1 Etude de fonctions : rappels de terminale

1.1 Transformations affines du graphe de f

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, étant donnée une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, nous avons vu l'effet des transformations $x \mapsto -f(x)$, $x \mapsto f(-x)$, $x \mapsto f(x) + a$, $x \mapsto f(x + a)$, $x \mapsto \lambda f(x)$ et $x \mapsto f(\lambda x)$ sur la courbe représentative de f .

1.2 Parité, imparité périodicité

Définition

On considère une partie D de $\mathbb{R}$ *symétrique* par rapport à 0.
Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- La fonction f est *paire* si pour tout $x \in D$: $f(-x) = f(x)$
- La fonction f est *impaire* si pour tout $x \in D$: $f(-x) = -f(x)$

Graphiquement.

- Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à (Oy) .
- Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O .

En pratique

Inutile d'étudier une fonction paire/impaire sur D tout entier, une étude sur $D \cap \mathbb{R}_+$ suffit.

Définition

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit T un réel strictement positif.
La fonction f est *T -périodique* si :

$$\forall x \in D, \quad x + T \in D \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x)$$

1.3 Rappels sur la dérivation

- **Cadre.**
- I est un intervalle
- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction
- a est un point de I

Définition

- La fonction f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a , $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ possède une limite finie quand x tend vers a .
En ce cas on pose $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (nombre dérivé de f en a)
- Si f est dérivable en tout point de I , on dit que f est dérivable sur I , et on appelle dérivée de f la fonction f' .

■ Formulaires à connaître : les 3 tableaux récapitulatifs des dérivées

Théorème : Composition

On suppose que :

- i) v est une fonction dérivable sur J
 - ii) u est une fonction dérivable sur I et valeurs dans J i.e. : $\forall x \in I, u(x) \in J$
- alors $v \circ u$ est dérivable sur I et : $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$

- **Cas particuliers à savoir.** Dérivées de u^α , e^u , $\ln(u)$, $\cos u$, $\sin u$...

Théorème

On suppose f dérivable sur I .

- f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, : $f'(x) \geq 0$
- f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, : $f'(x) = 0$

Condition suffisante de stricte monotonie : Si f vérifie :

- i) $\forall x \in I, \quad f'(x) \geq 0$
 - ii) f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points
- alors f est strictement croissante sur I .

2 Convexité : rappels de terminale

- **Cadre.** • I est un intervalle
- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur I

2.1 Définition et position par rapport aux cordes

Définition

f est convexe si pour tous $a, b \in I$: $\forall t \in [0, 1], f\left(\underbrace{(1-t)a + tb}_{\substack{\text{décrit } [a, b] \text{ lorsque} \\ t \text{ décrit } [0, 1]}}\right) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$

- **Géométriquement.** $\mathcal{C}_f$ est en dessous de toutes ses cordes.
- **Remarque.** f est concave si : $\forall a, b \in I, \forall t \in [0, 1], f((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b)$

2.2 Caractérisations de la convexité

Théorème

Il y a équivalence entre :

- i) f est convexe sur I
- ii) Pour tout $a \in I$, la fonction $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Théorème : Justifier la convexité

- On suppose f dérivable sur I . f est convexe ssi f' est croissante sur I
- On suppose f deux fois dérivable sur I . f est convexe ssi $f'' \geq 0$ sur I

2.3 Inégalités de convexité

- **Inégalité des cordes pour une fonction f convexe sur I .**

Soient $a, b \in I$, distincts. Pour tout x entre a et b : $f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

Théorème

On suppose f dérivable sur I . Si f est convexe sur I , alors le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses tangentes. Pour tous $a, x \in I$: $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$

Théorème : Inégalité de Jensen

On suppose f convexe sur I . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $a_1, \dots, a_n \in I$ et tous

$t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$: $f\left(\sum_{i=1}^n t_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(a_i)$

- **Cas particulier important.** Avec $t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$: $f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(a_i)$

Exemple 1 ♥ Inégalité arithmético-géométrique. ♥-

Pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$: $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq (x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$

L'adresse de la page des maths est : <https://mathieucathala.fr>