

En route pour le niveau 7 :

■ Comment franchir l'étape 1

(Niveau 5)

- Traitez l'exercice ci-dessous et remettez moi votre copie.
- Si elle est correctement rédigée et proprement présentée, elle vous permettra d'atteindre le niveau 5.
- La date limite est le 10 septembre^a

■ Comment franchir l'étape 2

(Niveau 7)

- Une fois l'étape 1 franchie^b, vous recevrez un lien vers l'énoncé d'un nouvel exercice.
- Si vous réussissez à traiter ce nouvel exercice, vous atteindrez le niveau 7

a. Il faut rendre plus tôt si vous envisagez de franchir l'étape 2.

b. i.e. une fois que vous avez rendu l'exercice et que celui-ci a été corrigé

Deux consignes importantes de rédaction

■ Se désintoxiquer de l'usage abusif du symbole $\Rightarrow$:

- Le symbole « $\Rightarrow$ » ne signifie pas « donc »
- Votre copie doit être rédigée sans utiliser ce symbole.

■ Attacher une grande importance à la présentation et à la rédaction :

- Faire des phrases complètes dans lesquelles l'orthographe n'est pas négligé
 - Ne pas utiliser les symboles tels que « $\forall$ » et « $\Leftrightarrow$ » comme des abréviations
- En cas de non respect d'une de ces consignes, votre copie ne pourra pas être corrigée.

Dans ce qui suit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et r est un réel strictement positif.

- On définit par récurrence les dérivées successives d'une fonction f définie sur I :
 - On pose $f^{(0)} = f$.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si f est n fois dérivable sur I et si la fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur I on pose $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.
- On note $\mathcal{A}(I)$ l'ensemble des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que f est n fois dérivable et la fonction $f^{(n)}$ est positive sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Pour toute $f \in \mathcal{A}(I)$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

- on note $P_{n,f}$ la fonction polynôme $x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ définie sur I

(de façon plus explicite : $P_{n,f}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ pour tout $x \in I$)

- On pose enfin : $R_{n,f} = f - P_{n,f}$.

Exercice 6

1. Montrer que $R_{n,f}$ est positive sur $[0, r[$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{A}([0, r[)$.

Indication : Commencer par trouver un lien entre $R'_{n+1,f}$ et $R_{n,f}$.

2. Soit $\lambda \geq 1$.

- a) Soit $f \in \mathcal{A}([0, r[)$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(0)}{x}$ est croissante sur $]0, r[$ puis que pour tout $x \in [0, \frac{r}{\lambda}[$: $\lambda R_{0,f}(x) \leq R_{0,f}(\lambda x)$

- b) Montrer que pour tous $f \in \mathcal{A}([0, r[)$, $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \frac{r}{\lambda}[$: $\lambda^{n+1} R_{n,f}(x) \leq R_{n,f}(\lambda x)$

3. Soit $f \in \mathcal{A}([0, r[)$. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in [0, r[$ tels que $x < y$: $0 \leq R_{n,f}(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$.

4. En déduire que pour tous $f \in \mathcal{A}([0, r[)$ et $x \in [0, r[$: $P_{n,f}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.

5. Soit $f \in \mathcal{A}([-r, r[)$.

- a) On note g la fonction $x \mapsto f(x) + f(-x)$. Montrer que $g \in \mathcal{A}([0, r[)$.

- b) En déduire que pour tout $x \in]-r, r[$: $P_{n,f}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.