Complément sur les sous-espaces affines

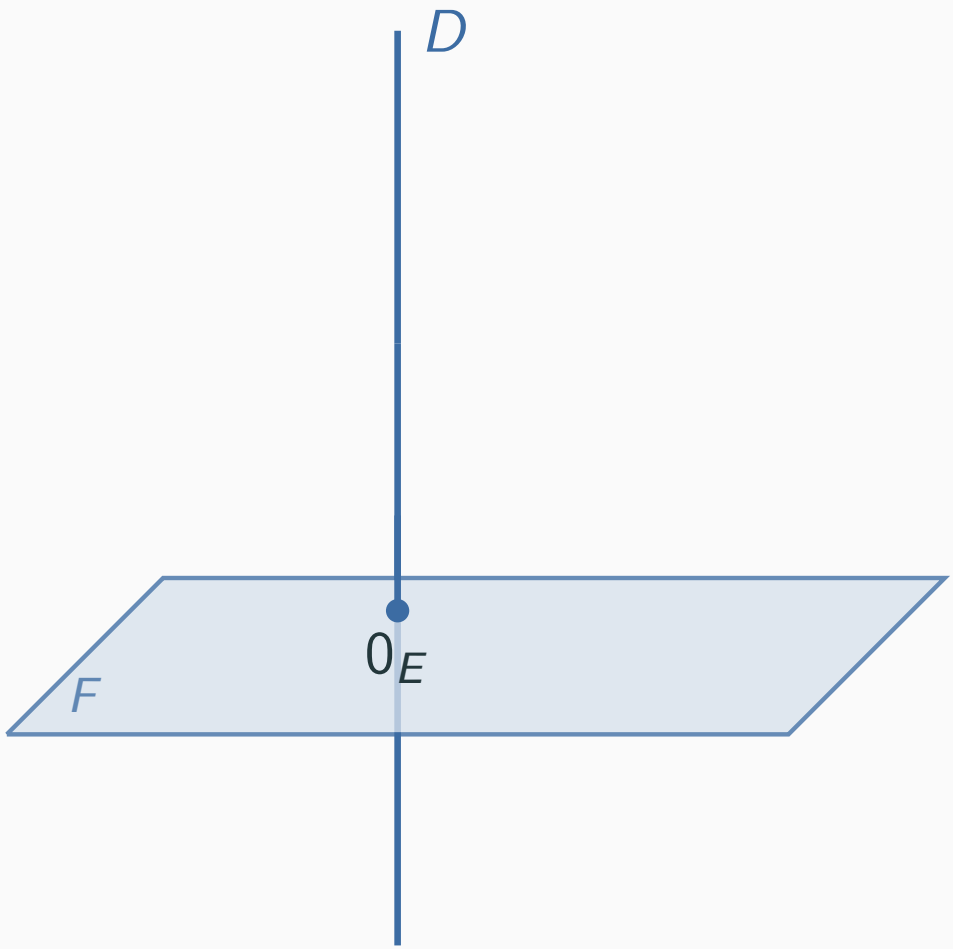
Chapitre 38

I Sous-espaces affines

I Sous-espaces affines

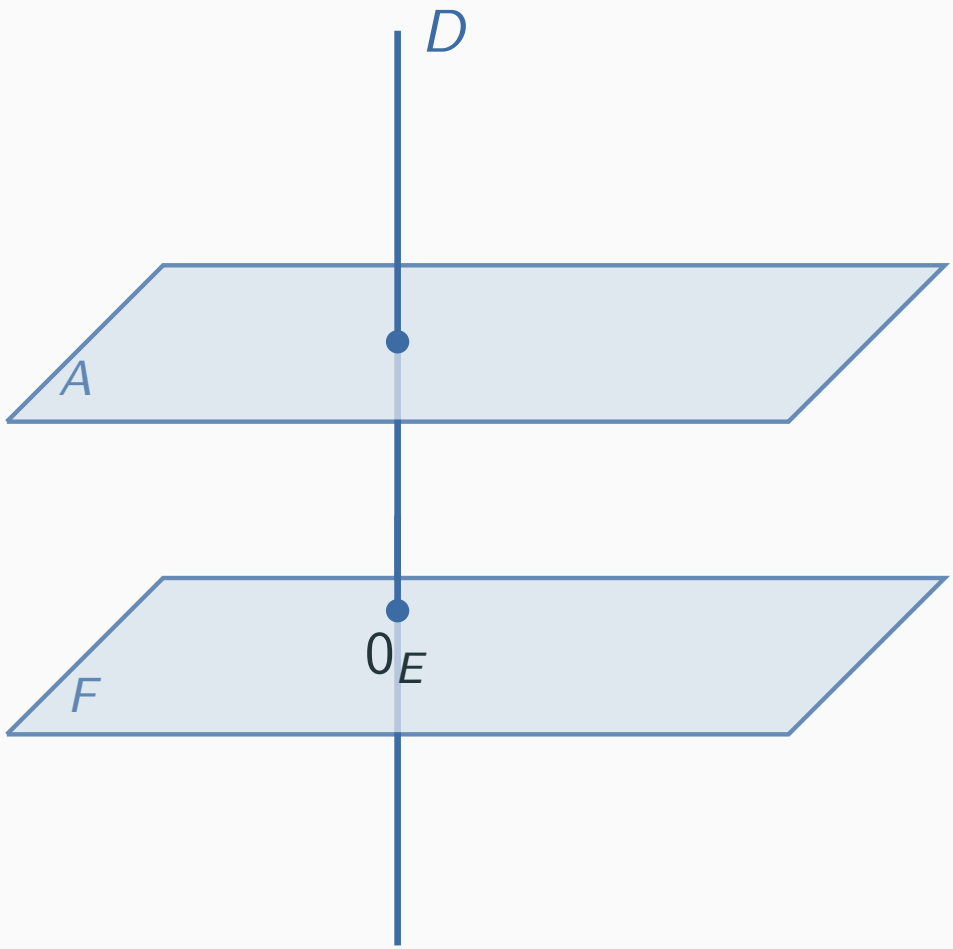
Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel



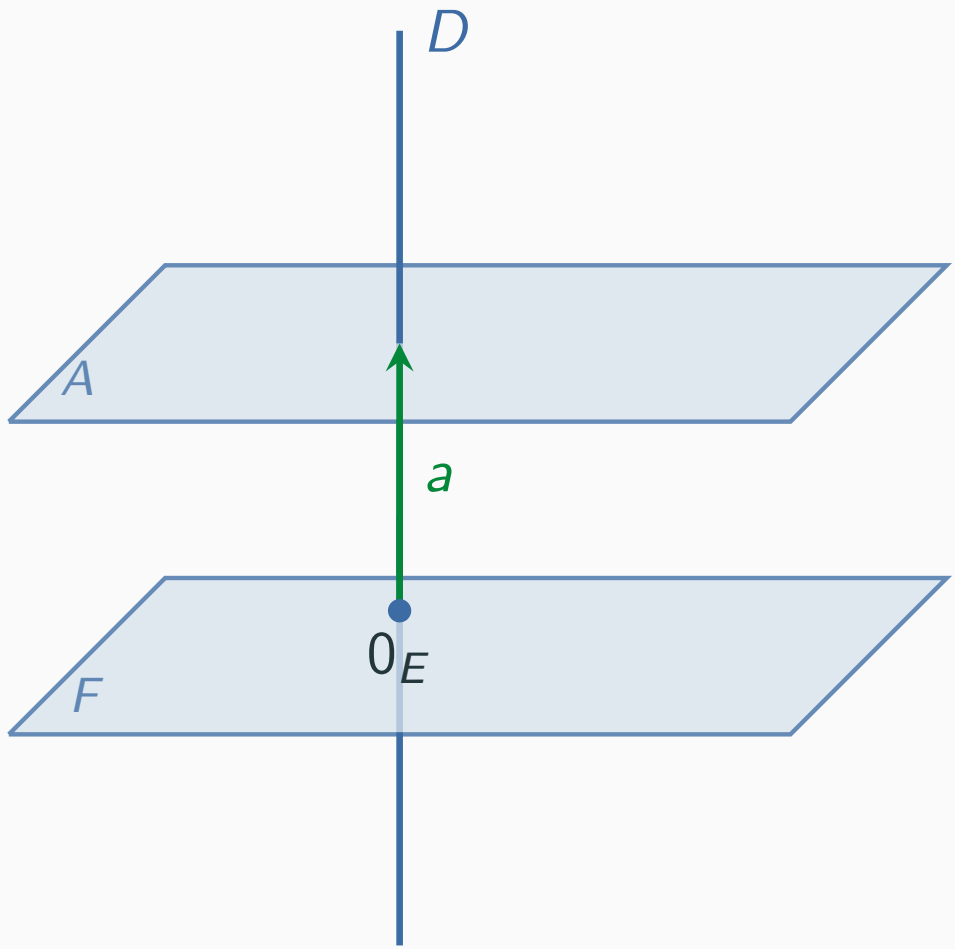
Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel



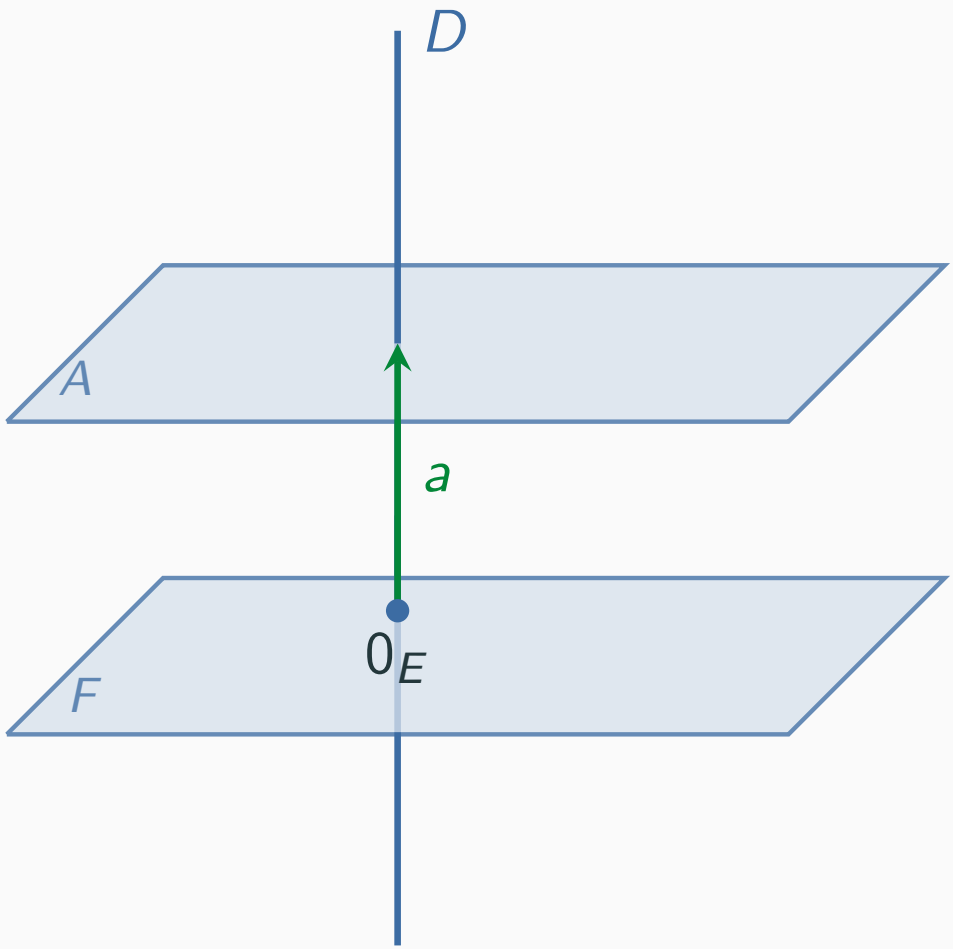
Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel



Définition 1

Une partie A de E est un *sous-espace affine* s'il existe :



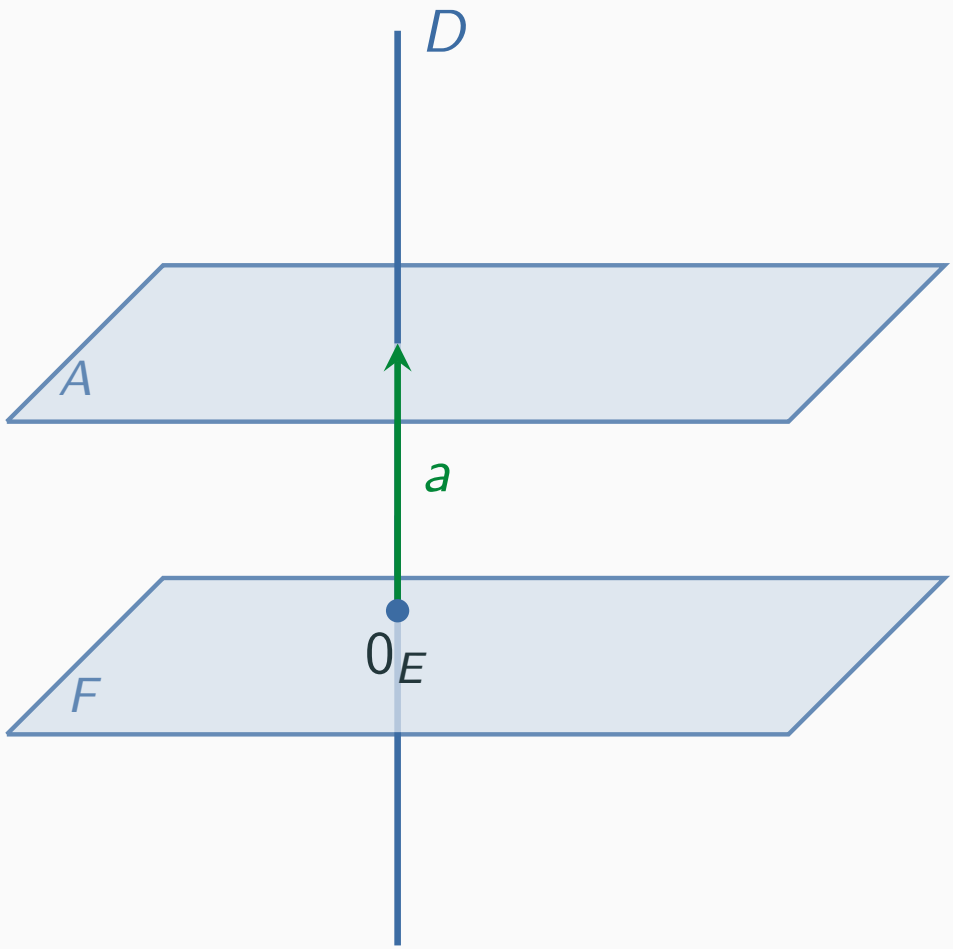
Définition 1

Une partie A de E est un *sous-espace affine* s'il existe :

- un vecteur $a \in E$
- un sous-e.v. F de E

tels que :

$$A = a + F$$



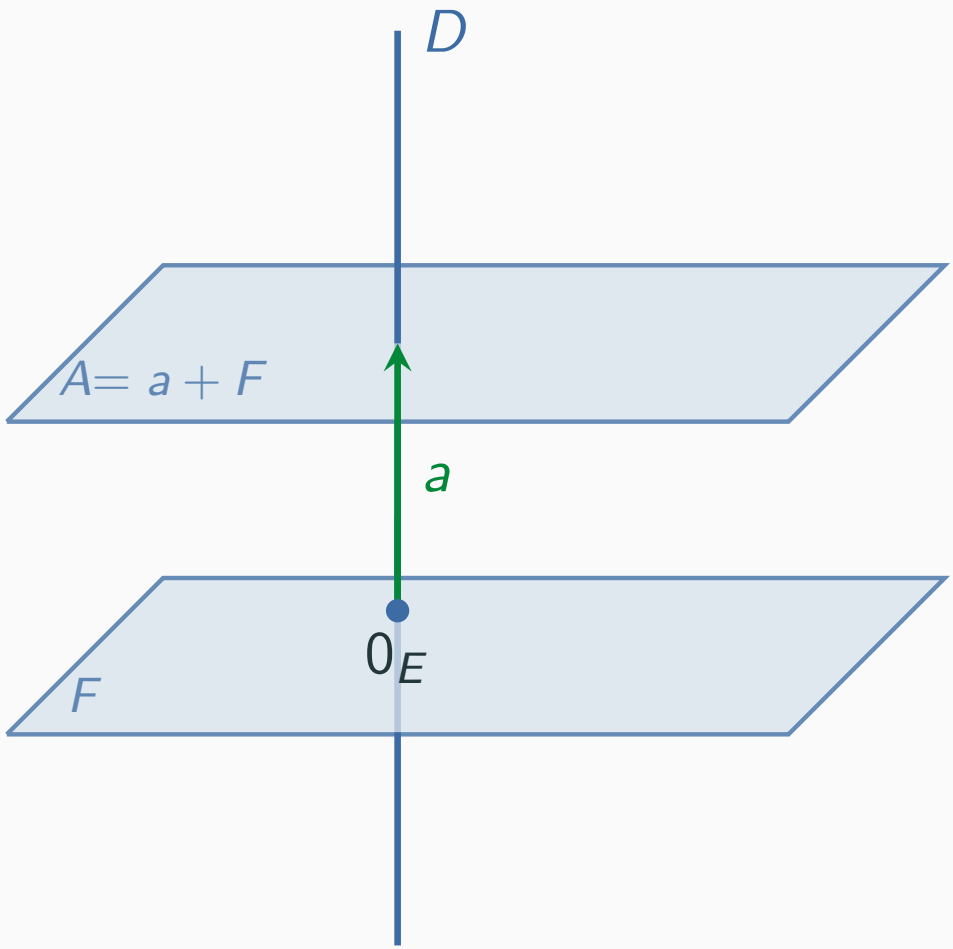
Définition 1

Une partie A de E est un *sous-espace affine* s'il existe :

- un vecteur $a \in E$
- un sous-e.v. F de E

tels que :

$$A = a + F \underset{\text{déf.}}{=} \{a + x\,,\, x \in F\}$$



1 Généralités

Exemple 1 : $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 4\}$

Montrer que A est un sous espace affine de $\mathbb{R}^2$

Exemple 2

Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

est un sous espace affine.

Théorème 1

Si $A = a + F$ est un sous-espace affine, alors :

Théorème 1

Si $A = a + F$ est un sous-espace affine, alors : le sous-espace vectoriel F est unique

Théorème 1

Si $A = a + F$ est un sous-espace affine, alors : le sous-espace vectoriel F est unique

appelé *direction de A*

Théorème 1

Si $A = a + F$ est un sous-espace affine, alors : le sous-espace vectoriel F est unique

appelé *direction de A*

Exercice 1

Démontrer la proposition précédente.

Théorème 1

Si $A = a + F$ est un sous-espace affine, alors : le sous-espace vectoriel F est unique

appelé *direction de A*

Remarque

Soient A et A' deux sous-espaces affines de directions F et F' :

Théorème 1

Si $A = a + F$ est un sous-espace affine, alors : le sous-espace vectoriel F est unique

appelé *direction de A*

Remarque

Soient A et A' deux sous-espaces affines de directions F et F' :

- ou bien $A \cap A' = \varnothing$.

Théorème 1

Si $A = a + F$ est un sous-espace affine, alors : le sous-espace vectoriel F est unique

appelé *direction de A*

Remarque

Soient A et A' deux sous-espaces affines de directions F et F' :

- ou bien $A \cap A' = \varnothing$.
- ou bien $A \cap A' \neq \varnothing$ est un sous-espace affine de direction $F \cap F'$.

2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

Notion d'équation linéaire

Equation de la forme : $f\ (\ x\ ) =\ b$

2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

Notion d'équation linéaire

Equation de la forme : $f\ (\ x\ ) = \ b$

inconnue
$x \in E$

2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

app. lin.
$f \in \mathscr{L}(E, F)$

Notion d'équation linéaire

Equation de la forme : $f(x) = b$

inconnue
$x \in E$

2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

app. lin.
$f \in \mathscr{L}(E, F)$

Notion d'équation linéaire

Equation de la forme : $f(x) = b$

scd. membre
$b \in F$

inconnue
$x \in E$

2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

app. lin.
$f \in \mathscr{L}(E, F)$

Notion d'équation linéaire

Equation de la forme : $f(x) = b$

scd. membre
$b \in F$

inconnue
$x \in E$

Exemple 3

Montrer que : $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$ est une équation linéaire.

2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

app. lin.
$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Notion d'équation linéaire

Equation de la forme : $f(x) = b$

scd. membre
$b \in F$

inconnue
$x \in E$

Exemple 3

Montrer que : $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$ est une équation linéaire.

Exemple 4 : Solutions de $y' + ay = b$

On suppose données $a, b : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Montrer que l'équation différentielle : $y' + a(t)y = b(t)$
peut s'écrire comme une équation linéaire.

2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

Théorème 2

- Si $b \notin \operatorname{Im} f$,

2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

Théorème 2

- Si $b \notin \operatorname{Im} f$, l'équation $f(x) = b$ n'a pas de solution

2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

Théorème 2

- Si $b \notin \operatorname{Im} f$, l'équation $f(x) = b$ n'a pas de solution
- Si $b \in \operatorname{Im} f$

2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

Théorème 2

- Si $b \notin \operatorname{Im} f$, l'équation $f(x) = b$ n'a pas de solution
- Si $b \in \operatorname{Im} f$ et si x_0 est un antécédent de b par f,

2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

Théorème 2

- Si $b \notin \operatorname{Im} f$, l'équation $f(x) = b$ n'a pas de solution
- Si $b \in \operatorname{Im} f$ et si x_0 est un antécédent de b par f, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de $f(x) = b$ est le sous-espace affine

2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

Théorème 2

- Si $b \notin \operatorname{Im} f$, l'équation $f(x) = b$ n'a pas de solution
- Si $b \in \operatorname{Im} f$ et si x_0 est un antécédent de b par f, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de $f(x) = b$ est le sous-espace affine

$$\mathscr{S} = x_0 + \operatorname{Ker} f$$

2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

Théorème 2

- Si $b \notin \operatorname{Im} f$, l'équation $f(x) = b$ n'a pas de solution
- Si $b \in \operatorname{Im} f$ et si x_0 est un antécédent de b par f, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de $f(x) = b$ est le sous-espace affine

$$\mathscr{S} = x_0 + \operatorname{Ker} f$$

solution particulière de $f(x) = b$

2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

Théorème 2

- Si $b \notin \operatorname{Im} f$, l'équation $f(x) = b$ n'a pas de solution
- Si $b \in \operatorname{Im} f$ et si x_0 est un antécédent de b par f, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de $f(x) = b$ est le sous-espace affine

$$\mathscr{S} = x_0 + \operatorname{Ker} f$$

x_0 : solution particulière de $f(x) = b$

$\operatorname{Ker} f$: solutions de l'eqn. homogène

2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

Théorème 2

- Si $b \notin \operatorname{Im} f$, l'équation $f(x) = b$ n'a pas de solution
- Si $b \in \operatorname{Im} f$ et si x_0 est un antécédent de b par f, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de $f(x) = b$ est le sous-espace affine

$$\mathscr{S} = x_0 + \operatorname{Ker} f$$

solution particulière de $f(x) = b$

solutions de l'eqn. homogène

Exercice 2

Démontrer ce théorème.

Théorème 2

- Si $b \notin \operatorname{Im} f$, l'équation $f(x) = b$ n'a pas de solution
- Si $b \in \operatorname{Im} f$ et si x_0 est un antécédent de b par f, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de $f(x) = b$ est le sous-espace affine

$$\mathscr{S} = x_0 + \operatorname{Ker} f$$

solution particulière de $f(x) = b$

solutions de l'eqn. homogène

Exemple 5 : $A = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 1 \quad \textbf{et} \quad f(1) = 2\}$

Montrer que A et un sous-espace affine.

Théorème 2

- Si $b \notin \operatorname{Im} f$, l'équation $f(x) = b$ n'a pas de solution
- Si $b \in \operatorname{Im} f$ et si x_0 est un antécédent de b par f, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de $f(x) = b$ est le sous-espace affine

$$\mathscr{S} = x_0 + \operatorname{Ker} f$$

solution particulière de $f(x) = b$

solutions de l'eqn. homogène

Exemple 6

Trouver l'ensemble $\mathscr{S}$ des suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n - 4$$

Théorème 2

- Si $b \notin \operatorname{Im} f$, l'équation $f(x) = b$ n'a pas de solution
- Si $b \in \operatorname{Im} f$ et si x_0 est un antécédent de b par f, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de $f(x) = b$ est le sous-espace affine

$$\mathscr{S} = x_0 + \operatorname{Ker} f$$

solution particulière de $f(x) = b$

solutions de l'eqn. homogène

Exemple 7 : $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

Donner tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(x_k) = y_k$$

2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

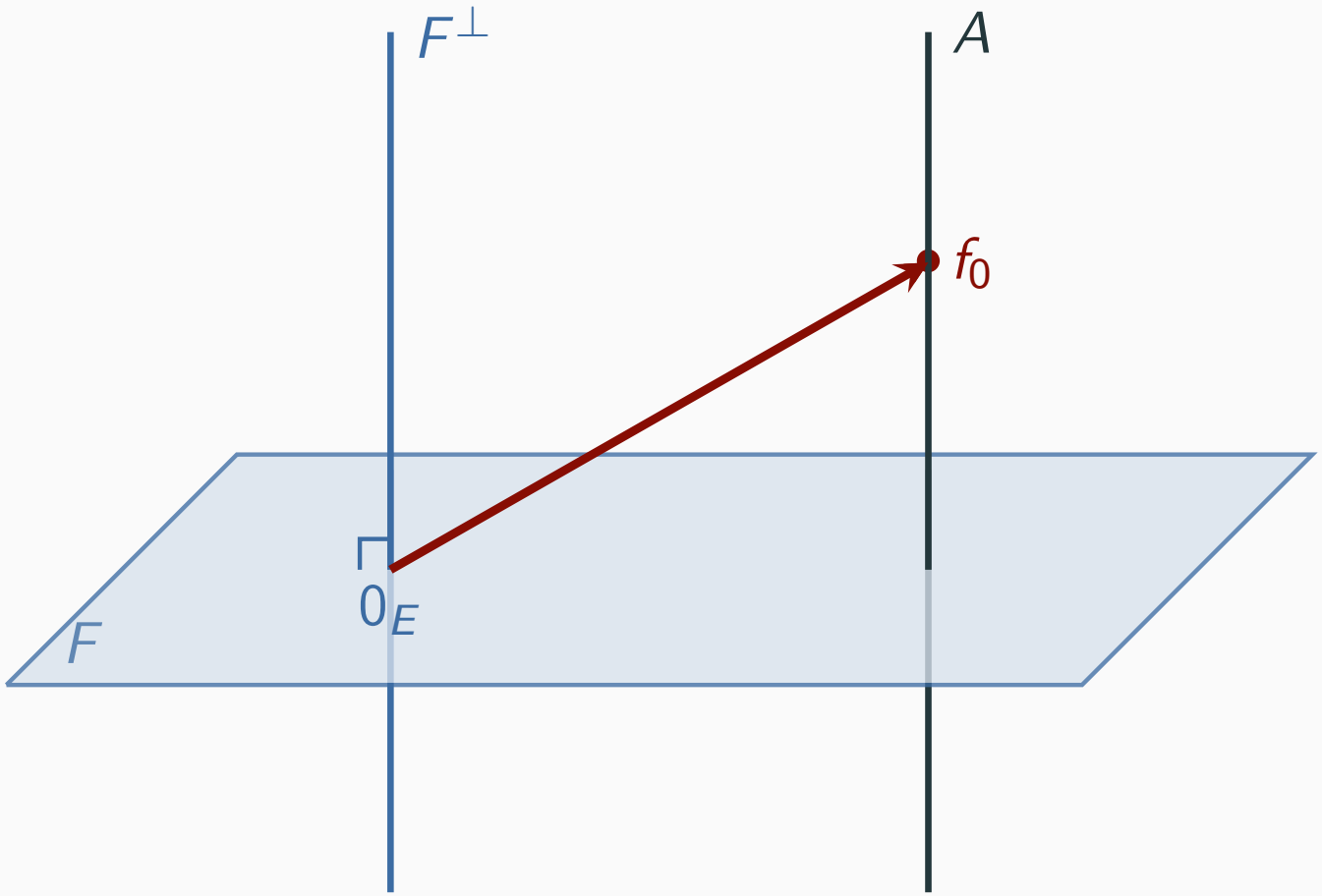
Exemple 9 : $A = \{f \in \mathscr{C}^2([0\,,1]\,,\mathbb{R}) \mid f(0) = 1 \quad \textbf{et} \quad f(1) = 2\}$

Calculer : $\inf_{f \in A} I(f)$ où pour tout $f \in A$: $I(f) = \int_0^1 (f^2 + f'^2)$.

2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

Exemple 9 : $A = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 1 \quad \textbf{et} \quad f(1) = 2\}$

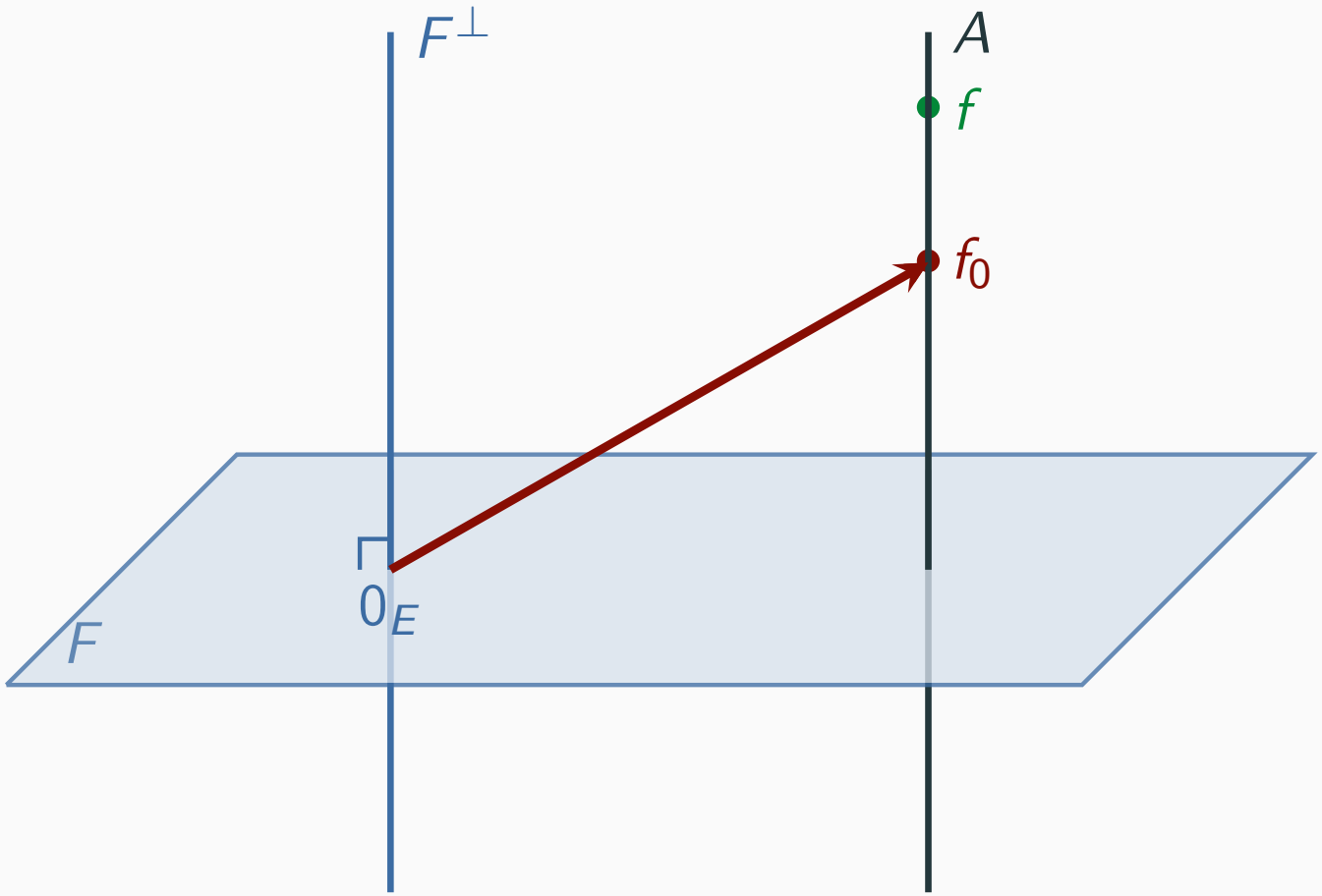
Calculer : $\inf_{f \in A} I(f)$ où pour tout $f \in A$: $I(f) = \int_0^1 (f^2 + f'^2)$.



2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

Exemple 9 : $A = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 1 \quad \textbf{et} \quad f(1) = 2\}$

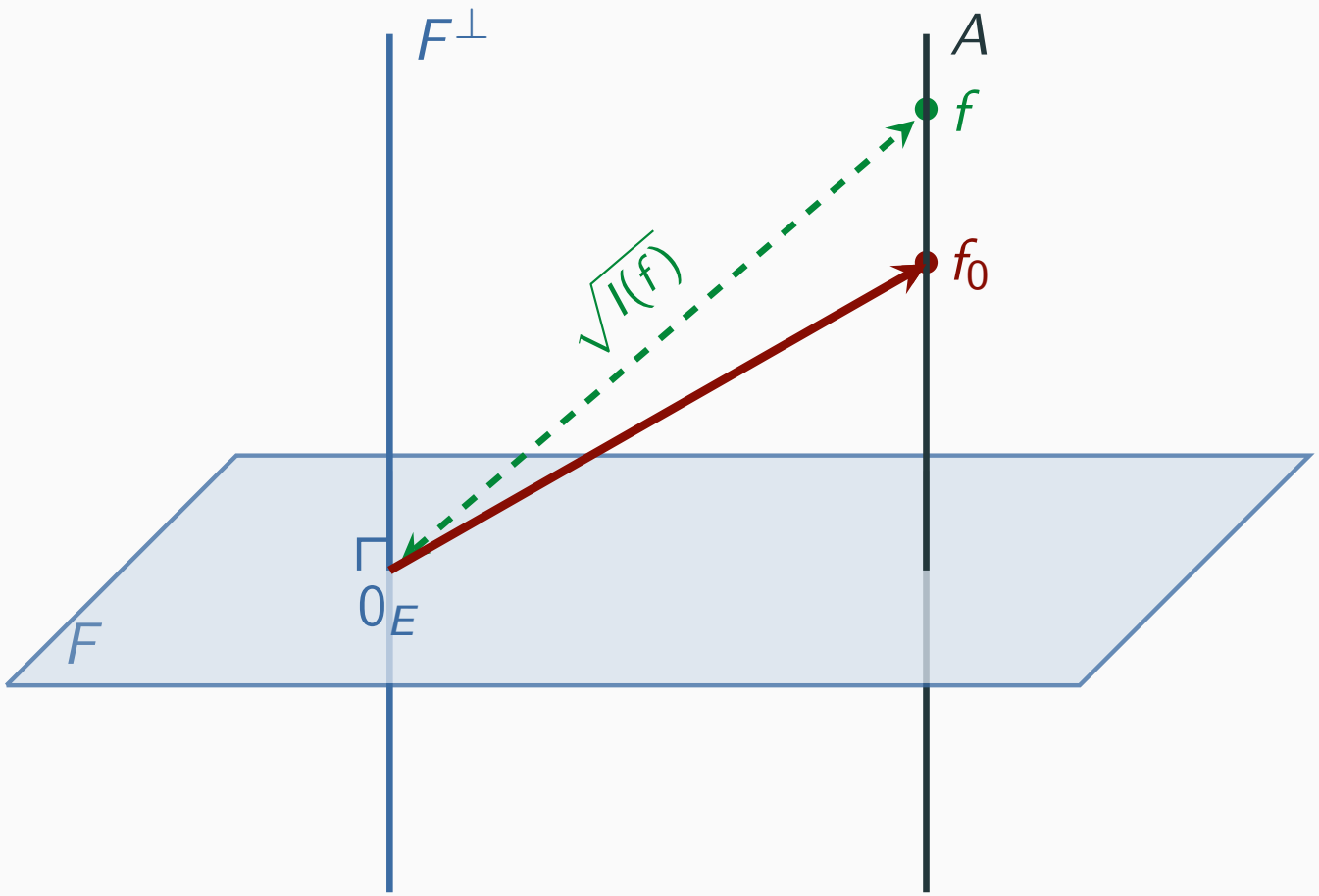
Calculer : $\inf_{f \in A} I(f)$ où pour tout $f \in A$: $I(f) = \int_0^1 (f^2 + f'^2)$.



2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

Exemple 9 : $A = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 1 \quad \textbf{et} \quad f(1) = 2\}$

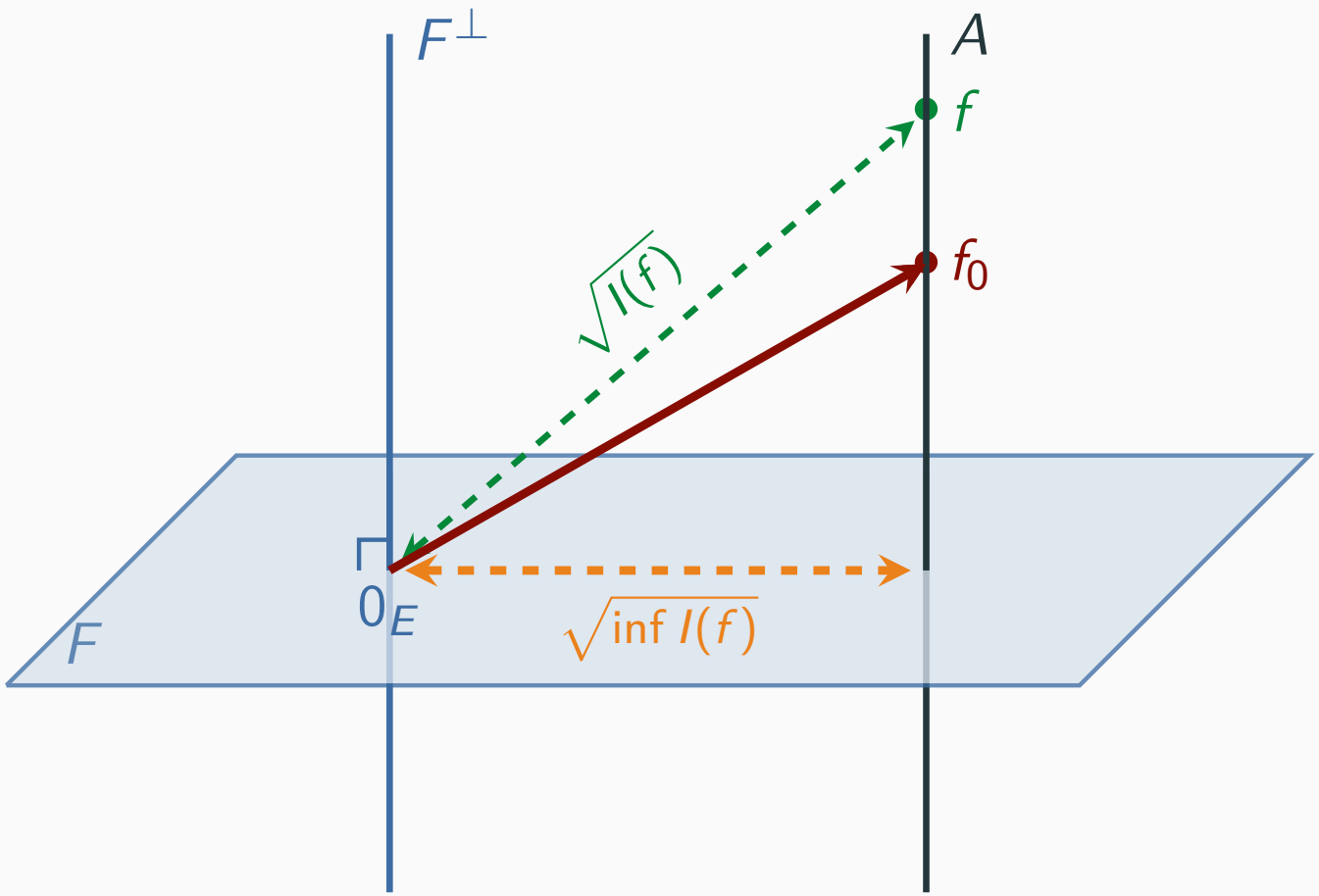
Calculer : $\inf_{f \in A} I(f)$ où pour tout $f \in A$: $I(f) = \int_0^1 (f^2 + f'^2)$.



2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

Exemple 9 : $A = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 1 \quad \textbf{et} \quad f(1) = 2\}$

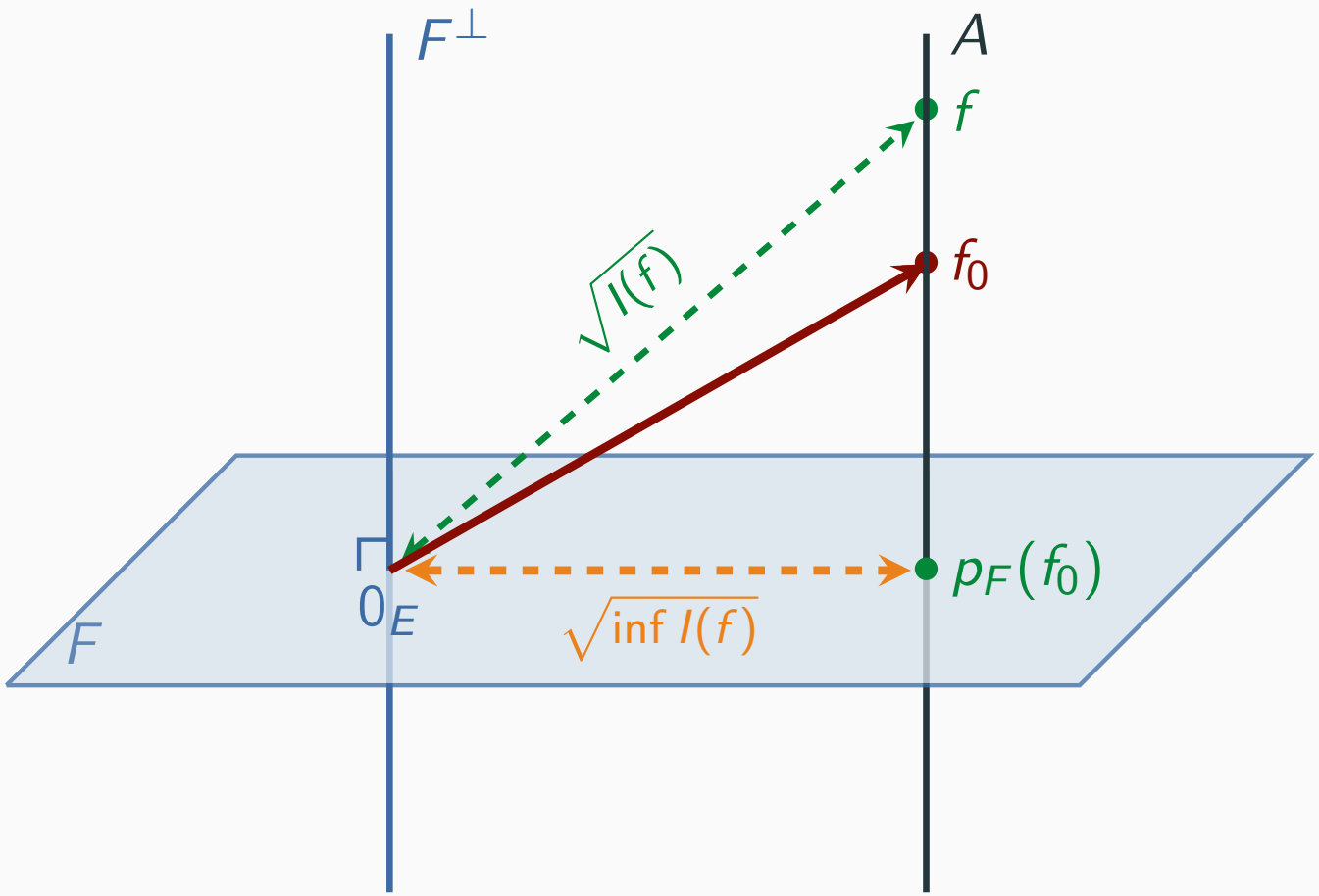
Calculer : $\inf_{f \in A} I(f)$ où pour tout $f \in A$: $I(f) = \int_0^1 (f^2 + f'^2)$.



2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

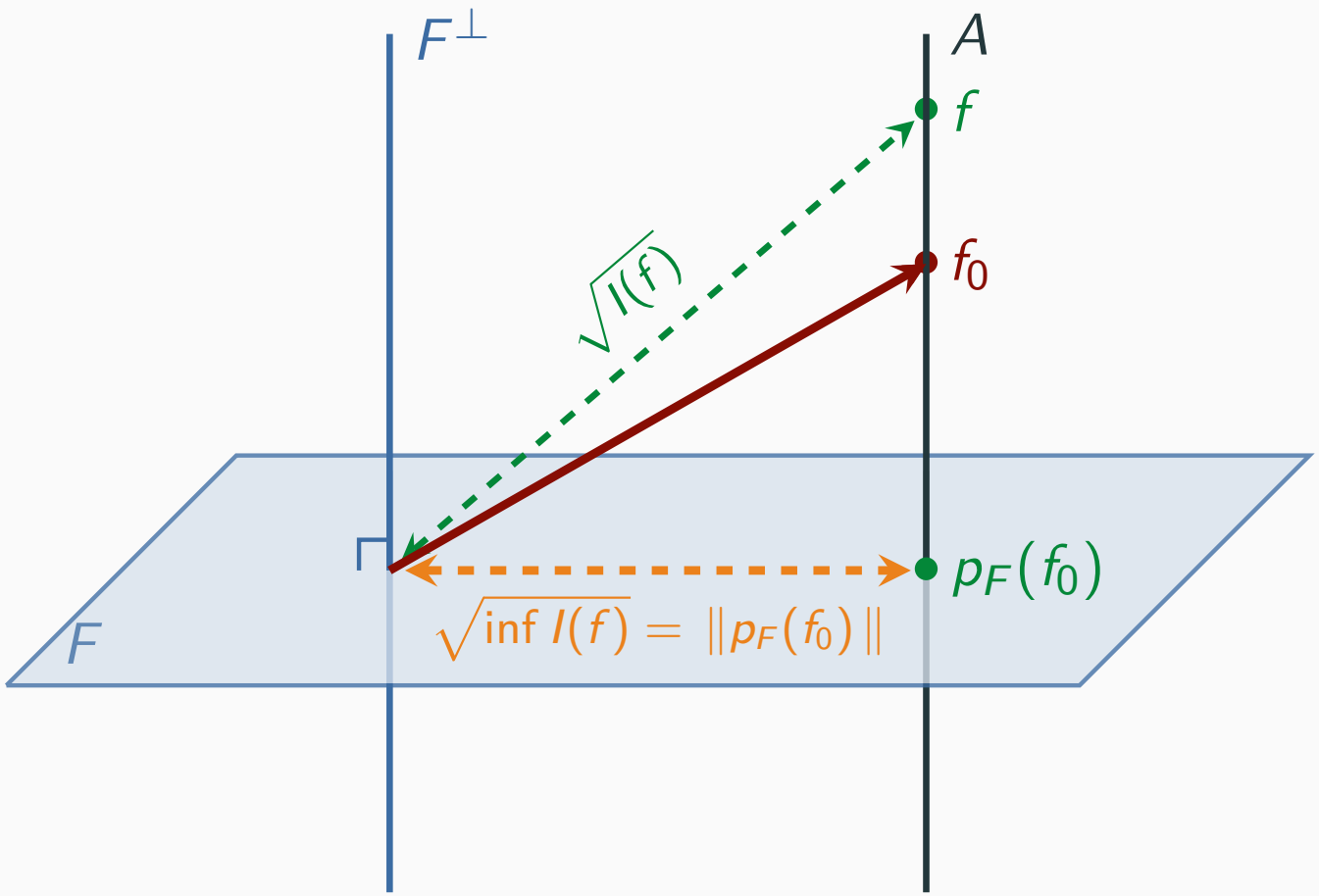
Exemple 9 : $A = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 1 \quad \textbf{et} \quad f(1) = 2\}$

Calculer : $\inf_{f \in A} I(f)$ où pour tout $f \in A$: $I(f) = \int_0^1 (f^2 + f'^2)$.



Exemple 9 : $A = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 1 \quad \textbf{et} \quad f(1) = 2\}$

Calculer : $\inf_{f \in A} I(f)$ où pour tout $f \in A$: $I(f) = \int_0^1 (f^2 + f'^2)$.



3 Traduction matricielle : solutions d'un système linéaire

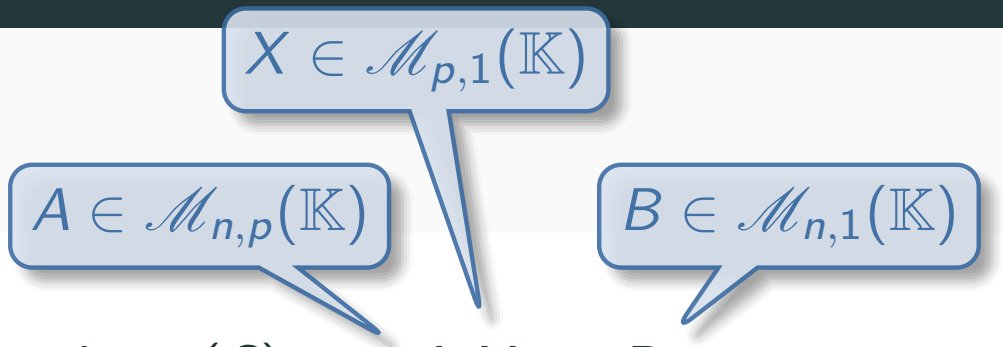
Cadre

On considère le système (S) : $\quad A\,X = B$

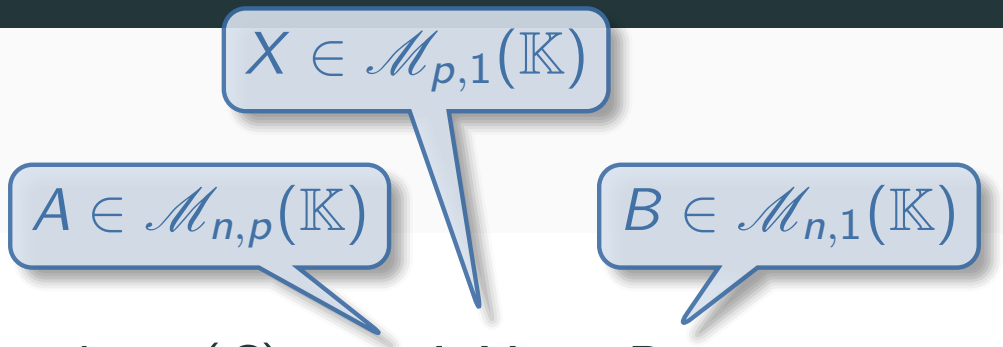
3 Traduction matricielle : solutions d'un système linéaire

Cadre

On considère le système (S) : $AX = B$



3 Traduction matricielle : solutions d'un système linéaire



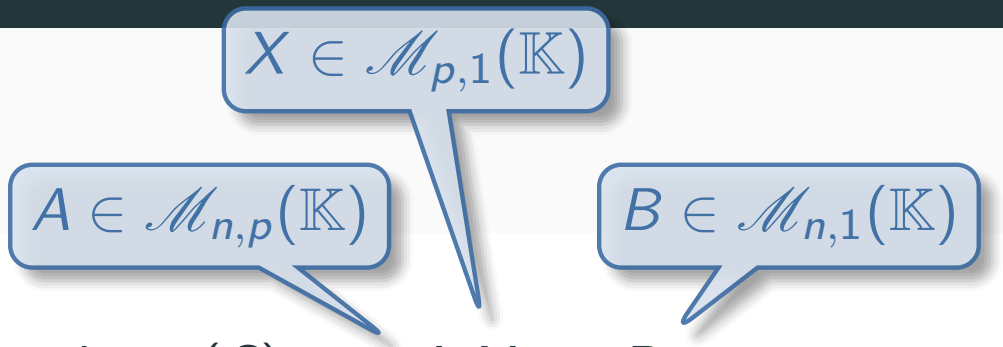
Cadre

On considère le système (S) : $AX = B$

Théorème 3

Si (S) est compatible et si X_0 est une solution, l'ensemble des solutions de (S) est :

3 Traduction matricielle : solutions d'un système linéaire



Cadre

On considère le système (S) : $AX = B$

Théorème 3

Si (S) est compatible et si X_0 est une solution, l'ensemble des solutions de (S) est : le sous-espace affine : $X_0 + \operatorname{Ker} A$

Conséquence

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, si (S) a une unique solution, alors la matrice A est inversible.

3 Traduction matricielle : solutions d'un système linéaire

Théorème 4 : Système homogène

L'ensemble des solution de $AX = 0$ est le s.e.v. :

Exercice 3

Démontrer le résultat sur la dimension de Ker A.

3 Traduction matricielle : solutions d'un système linéaire

Théorème 4 : Système homogène

L'ensemble des solution de $AX = 0$ est le s.e.v. : $\operatorname{Ker} A$

Exercice 3

Démontrer le résultat sur la dimension de $\operatorname{Ker} A$.

3 Traduction matricielle : solutions d'un système linéaire

il est de dimension $p - r$ où $r = \text{rg}(A)$

Théorème 4 : Système homogène

L'ensemble des solution de $AX = 0$ est le s.e.v. : $\text{Ker}\, A$

Exercice 3

Démontrer le résultat sur la dimension de $\text{Ker}\, A$.