

Fonctions de deux variables

Chapitre 37

I Fonction continue à deux variables

I Fonction continue à deux variables

II Dériver une fonction de deux variables

III Dérivation des fonctions composées

1 Ouverts de \mathbb{R}^2

Cadre

- Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

1 Ouverts de \mathbb{R}^2

Cadre

- Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ouverts de \mathbb{R}^2

1 Ouverts de \mathbb{R}^2

Cadre

- Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ouverts de \mathbb{R}^2

- *Boule ouverte de centre $p \in \mathbb{R}^2$ et de rayon r :*

1 Ouverts de \mathbb{R}^2

Cadre

- Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ouverts de \mathbb{R}^2

- *Boule ouverte de centre $p \in \mathbb{R}^2$ et de rayon r :*

$$B(p, r) = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u - p\| < r\}$$

1 Ouverts de \mathbb{R}^2

Cadre

- Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ouverts de \mathbb{R}^2

- *Boule ouverte de centre $p \in \mathbb{R}^2$ et de rayon r :*

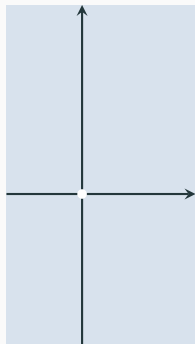
$$B(p, r) = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u - p\| < r\}$$

- *Ouvert de \mathbb{R}^2 . Partie U de \mathbb{R}^2 telle que pour tout $p \in U$, il existe $r > 0$ tel que : $B(p, r) \subset U$.*

1 Ouverts de \mathbb{R}^2

Exemple 1 : Les ensembles suivants sont des ouverts de \mathbb{R}^2

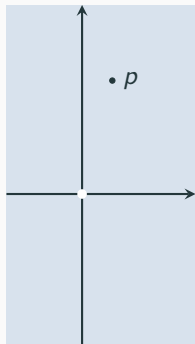
b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$



1 Ouverts de \mathbb{R}^2

Exemple 1 : Les ensembles suivants sont des ouverts de \mathbb{R}^2

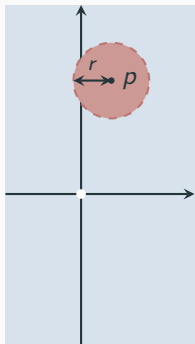
b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$



1 Ouverts de \mathbb{R}^2

Exemple 1 : Les ensembles suivants sont des ouverts de \mathbb{R}^2

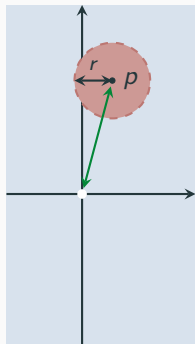
b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$



1 Ouverts de \mathbb{R}^2

Exemple 1 : Les ensembles suivants sont des ouverts de \mathbb{R}^2

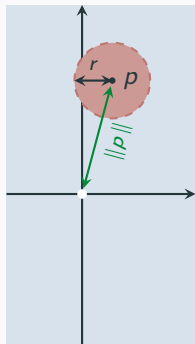
b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$



1 Ouverts de \mathbb{R}^2

Exemple 1 : Les ensembles suivants sont des ouverts de \mathbb{R}^2

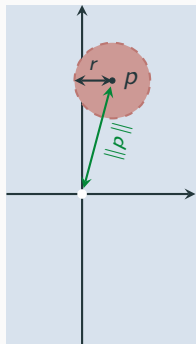
b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$



1 Ouverts de \mathbb{R}^2

Exemple 1 : Les ensembles suivants sont des ouverts de \mathbb{R}^2

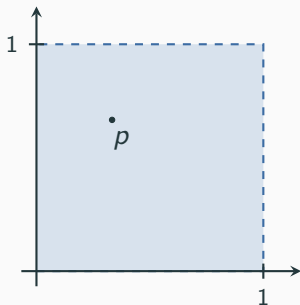
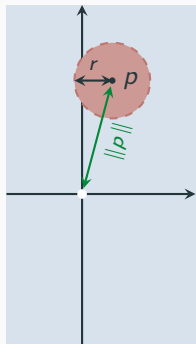
d) $]0, 1[\times]0, 1[$



1 Ouverts de \mathbb{R}^2

Exemple 1 : Les ensembles suivants sont des ouverts de \mathbb{R}^2

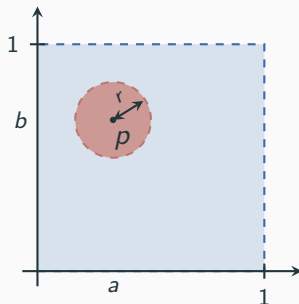
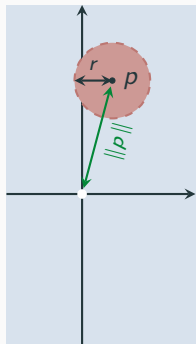
d) $]0, 1[\times]0, 1[$



1 Ouverts de \mathbb{R}^2

Exemple 1 : Les ensembles suivants sont des ouverts de \mathbb{R}^2

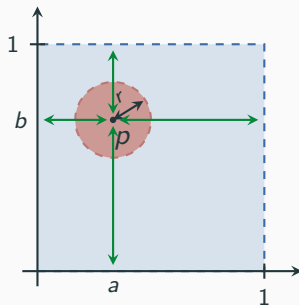
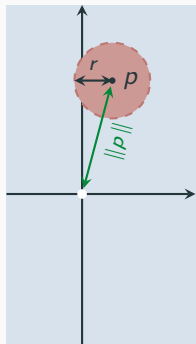
d) $]0, 1[\times]0, 1[$



1 Ouverts de \mathbb{R}^2

Exemple 1 : Les ensembles suivants sont des ouverts de \mathbb{R}^2

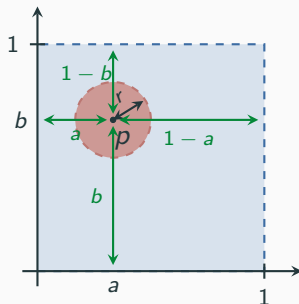
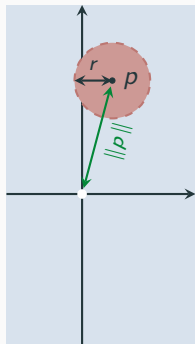
d) $]0, 1[\times]0, 1[$



1 Ouverts de \mathbb{R}^2

Exemple 1 : Les ensembles suivants sont des ouverts de \mathbb{R}^2

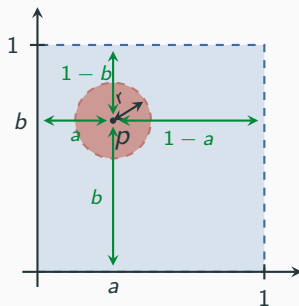
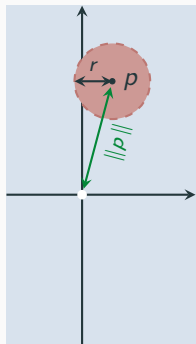
d) $]0, 1[\times]0, 1[$



1 Ouverts de \mathbb{R}^2

Exemple 1 : Les ensembles suivants sont des ouverts de \mathbb{R}^2

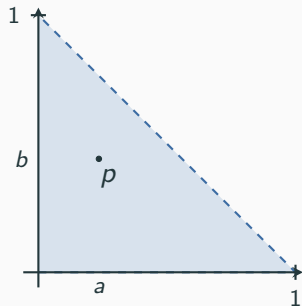
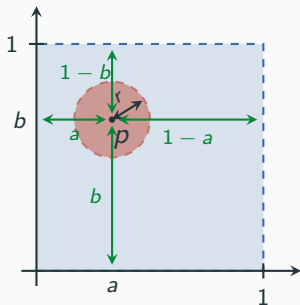
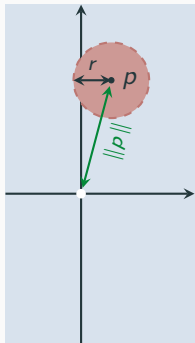
e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0 \text{ et } x + y < 1\}$



1 Ouverts de \mathbb{R}^2

Exemple 1 : Les ensembles suivants sont des ouverts de \mathbb{R}^2

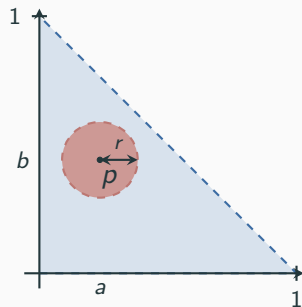
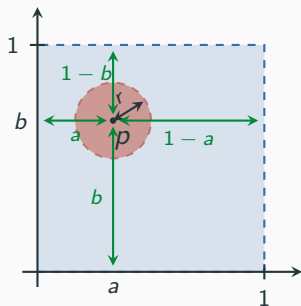
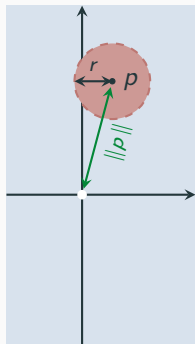
e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0 \text{ et } x + y < 1\}$



1 Ouverts de \mathbb{R}^2

Exemple 1 : Les ensembles suivants sont des ouverts de \mathbb{R}^2

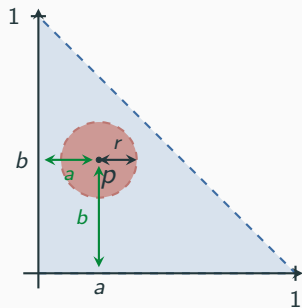
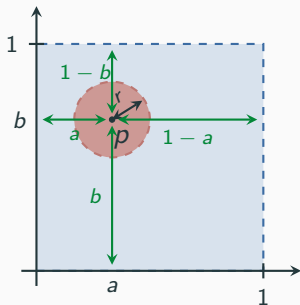
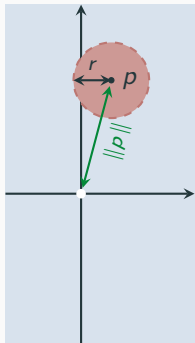
e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0 \text{ et } x + y < 1\}$



1 Ouverts de \mathbb{R}^2

Exemple 1 : Les ensembles suivants sont des ouverts de \mathbb{R}^2

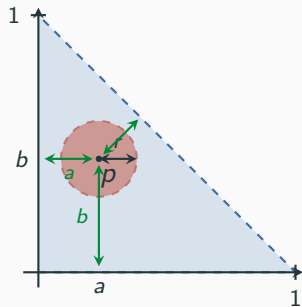
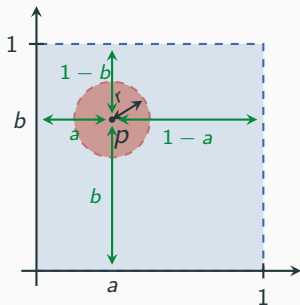
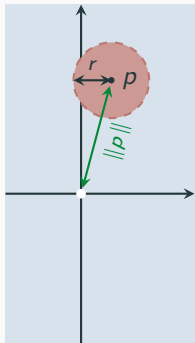
e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0 \text{ et } x + y < 1\}$



1 Ouverts de \mathbb{R}^2

Exemple 1 : Les ensembles suivants sont des ouverts de \mathbb{R}^2

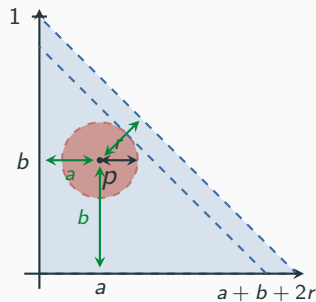
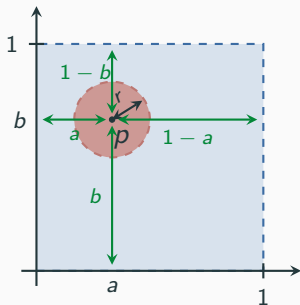
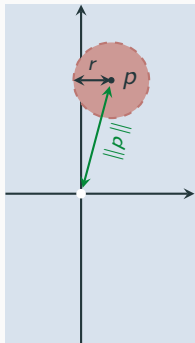
e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0 \text{ et } x + y < 1\}$



1 Ouverts de \mathbb{R}^2

Exemple 1 : Les ensembles suivants sont des ouverts de \mathbb{R}^2

e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0 \text{ et } x + y < 1\}$



2 Continuité d'une fonction de deux variables

Cadre

- U est un ouvert de \mathbb{R}^2
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction

Définition 1

Soit $p \in U$. La fonction f est *continue en p* si :

2 Continuité d'une fonction de deux variables

Cadre

- U est un ouvert de \mathbb{R}^2
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction

Définition 1

Soit $p \in U$. La fonction f est *continue en p* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |f(u) - f(p)| \leq \varepsilon$$

2 Continuité d'une fonction de deux variables

Cadre

- U est un ouvert de \mathbb{R}^2
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction

Définition 1

Soit $p \in U$. La fonction f est *continue en p* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \mid \quad |f(u) - f(p)| \leq \varepsilon$$

2 Continuité d'une fonction de deux variables

Cadre

- U est un ouvert de \mathbb{R}^2
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction

Définition 1

Soit $p \in U$. La fonction f est *continue en p* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \mid \forall u \in B(p, \alpha) \cap U, \quad |f(u) - f(p)| \leq \varepsilon$$

2 Continuité d'une fonction de deux variables

f est dite *continue sur U*
si elle l'est en tout point de *U*.

Cadre

- *U* est un ouvert de \mathbb{R}^2
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction

Définition 1

Soit $p \in U$. La fonction f est *continue en p* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \mid \forall u \in B(p, \alpha) \cap U, \quad |f(u) - f(p)| \leq \varepsilon$$

2 Continuité d'une fonction de deux variables

f est dite *continue sur U*
si elle l'est en tout point de *U*.

Cadre

- *U* est un ouvert de \mathbb{R}^2
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction

Définition 1

Soit $p \in U$. La fonction f est *continue en p* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \mid \forall u \in B(p, \alpha) \cap U, \quad |f(u) - f(p)| \leq \varepsilon$$

« $f(u) \xrightarrow[u \rightarrow p]{} f(p)$ »

2 Continuité d'une fonction de deux variables

f est dite *continue sur U*
si elle l'est en tout point de *U*.

Cadre

- *U* est un ouvert de \mathbb{R}^2
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction

Définition 1

Soit $p \in U$. La fonction f est *continue en p* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \mid \forall u \in B(p, \alpha) \cap U, \quad |f(u) - f(p)| \leq \varepsilon$$

« $f(u) \xrightarrow[u \rightarrow p]{} f(p)$ »

Exemple 2

Montrer que $f : (x, y) \mapsto x$ et $g : (x, y) \mapsto y$ sont continues sur \mathbb{R}^2 .

2 Continuité d'une fonction de deux variables

SF 1 : Justifier la continuité d'une fonction sur un ouvert U

1. Opérations sur les fonctions continues

2 Continuité d'une fonction de deux variables

SF 1 : Justifier la continuité d'une fonction sur un ouvert U

1. Opérations sur les fonctions continues
2. Continuité des fonctions polynomiales

2 Continuité d'une fonction de deux variables

Composition 1

$$U \rightarrow I \rightarrow \mathbb{R}$$

SF 1 : Justifier la continuité d'une fonction sur un ouvert U

1. Opérations sur les fonctions continues
2. Continuité des fonctions polynomiales

2 Continuité d'une fonction de deux variables

Composition 1

$$U \rightarrow I \rightarrow \mathbb{R}$$

(x, y)

SF 1 : Justifier la continuité d'une fonction sur un ouvert U

1. Opérations sur les fonctions continues
2. Continuité des fonctions polynomiales

2 Continuité d'une fonction de deux variables

Composition 1

$$U \rightarrow I \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \xrightarrow{f} f(x, y)$$

SF 1 : Justifier la continuité d'une fonction sur un ouvert U

1. Opérations sur les fonctions continues
2. Continuité des fonctions polynomiales

2 Continuité d'une fonction de deux variables

Composition 1

$$\begin{array}{ccccc} U & \rightarrow & I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \xrightarrow{f} & f(x, y) & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(f(x, y)) \end{array}$$

SF 1 : Justifier la continuité d'une fonction sur un ouvert U

1. Opérations sur les fonctions continues
2. Continuité des fonctions polynomiales

2 Continuité d'une fonction de deux variables

Composition 1

$$U \rightarrow I \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \xrightarrow{f} f(x, y) \xrightarrow{\varphi} \varphi(f(x, y))$$

Composition 2

$$I \rightarrow U \rightarrow \mathbb{R}$$

SF 1 : Justifier la continuité d'une fonction sur un ouvert U

1. Opérations sur les fonctions continues
2. Continuité des fonctions polynomiales

2 Continuité d'une fonction de deux variables

Composition 1

$$U \rightarrow I \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \xrightarrow{f} f(x, y) \xrightarrow{\varphi} \varphi(f(x, y))$$

Composition 2

$$I \rightarrow U \rightarrow \mathbb{R}$$
$$t$$

SF 1 : Justifier la continuité d'une fonction sur un ouvert U

1. Opérations sur les fonctions continues
2. Continuité des fonctions polynomiales

2 Continuité d'une fonction de deux variables

Composition 1

$$U \rightarrow I \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \xrightarrow{f} f(x, y) \xrightarrow{\varphi} \varphi(f(x, y))$$

Composition 2

$$I \rightarrow U \rightarrow \mathbb{R}$$
$$t \xrightarrow{u, v} (u(t), v(t))$$

SF 1 : Justifier la continuité d'une fonction sur un ouvert U

1. Opérations sur les fonctions continues
2. Continuité des fonctions polynomiales

2 Continuité d'une fonction de deux variables

Composition 1

$$\begin{array}{ccccc} U & \rightarrow & I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \xrightarrow{f} & f(x, y) & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(f(x, y)) \end{array}$$

Composition 2

$$\begin{array}{ccccc} I & \rightarrow & U & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \xrightarrow{u, v} & (u(t), v(t)) & \xrightarrow{f} & f(u(t), v(t)) \end{array}$$

SF 1 : Justifier la continuité d'une fonction sur un ouvert U

1. Opérations sur les fonctions continues
2. Continuité des fonctions polynomiales

2 Continuité d'une fonction de deux variables

Composition 1

$$\begin{array}{ccccc} U & \rightarrow & I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \xrightarrow{f} & f(x, y) & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(f(x, y)) \end{array}$$

Composition 2

$$\begin{array}{ccccc} I & \rightarrow & U & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \xrightarrow{u, v} & (u(t), v(t)) & \xrightarrow{f} & f(u(t), v(t)) \end{array}$$

SF 1 : Justifier la continuité d'une fonction sur un ouvert U

1. Opérations sur les fonctions continues
2. Continuité des fonctions polynomiales

Exemple 3

Justifier la continuité sur \mathbb{R}^2 de $f : (x, y) \mapsto \frac{\ln(x^2 + y^2 + 1)}{e^x + y^2}$

2 Continuité d'une fonction de deux variables

SF 2 : continuité en un point p à problème


On cherche une majoration de la forme : $|f(u) - f(p)| \leq \varepsilon(r)$

Exemple 4

Montrer que $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

est continue sur \mathbb{R}^2 .

2 Continuité d'une fonction de deux variables


$$\|u - p\|$$

SF 2 : continuité en un point p à problème

On cherche une majoration de la forme : $|f(u) - f(p)| \leq \varepsilon(r)$

Exemple 4

Montrer que $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

est continue sur \mathbb{R}^2 .

2 Continuité d'une fonction de deux variables

Fonction de
limite nulle

$\|u - p\|$

SF 2 : continuité en un point p à problème

On cherche une majoration de la forme : $|f(u) - f(p)| \leq \varepsilon(r)$

Exemple 4

Montrer que $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

est continue sur \mathbb{R}^2 .

2 Continuité d'une fonction de deux variables

SF 3 : montrer que f n'est pas continue en un point

On peut chercher deux fonctions u et v telles que :

- $u(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} a$ et $v(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} b$
- $t \mapsto f(u(t), v(t))$ n'est pas continue en 0.

Exemple 5 :

Montrer que $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

n'est pas continue en $(0, 0)$.

II Dériver une fonction de deux variables

I Fonction continue à deux variables

II Dériver une fonction de deux variables

III Dérivation des fonctions composées

1 Dérivées partielles

Ouvert de \mathbb{R}^2

Cadre

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction
- (a, b) est un point de U .

1 Dérivées partielles

Ouvert de \mathbb{R}^2

Cadre

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction
- (a, b) est un point de U .

Définition 1

Lorsqu'elles existent et sont finies :

1 Dérivées partielles

Ouvert de \mathbb{R}^2

Cadre

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction
- (a, b) est un point de U .

Définition 1

Lorsqu'elles existent et sont finies :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t}$$

1 Dérivées partielles

Ouvert de \mathbb{R}^2

Cadre

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction
- (a, b) est un point de U .

Définition 1

Lorsqu'elles existent et sont finies :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b+t) - f(a, b)}{t}$$

1 Dérivées partielles

Ouvert de \mathbb{R}^2

Cadre

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction
- (a, b) est un point de U .

Définition 1

Lorsqu'elles existent et sont finies :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b+t) - f(a, b)}{t}$$

En pratique

L'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ équivaut à :

1 Dérivées partielles

Ouvert de \mathbb{R}^2

Cadre

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction
- (a, b) est un point de U .

Définition 1

Lorsqu'elles existent et sont finies :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b+t) - f(a, b)}{t}$$

En pratique

L'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ équivaut à : la dérivabilité en a de la fonction $f_1 : x \mapsto f(x, b)$

1 Dérivées partielles

Ouvert de \mathbb{R}^2

Cadre

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction
- (a, b) est un point de U .

Définition 1

Lorsqu'elles existent et sont finies :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \underset{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \underset{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b+t) - f(a, b)}{t}$$

et $f'_1(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$

L'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ équivaut à : la dérivabilité en a de la fonction $f_1 : x \mapsto f(x, b)$

1 Dérivées partielles

Ouvert de \mathbb{R}^2

Cadre

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction
- (a, b) est un point de U .

Définition 1

Lorsqu'elles existent et sont finies :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b+t) - f(a, b)}{t}$$

et $f'_1(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$

L'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ équivaut à : la dérivabilité en a de la fonction $f_1 : x \mapsto f(x, b)$

⚠ Attention ⚠

L'existence de dérivées partielles ne garantit pas la continuité de f

1 Dérivées partielles

Cadre

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction
- (a, b) est un point de U .

Définition 1

Lorsqu'elles existent et sont finies :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b+t) - f(a, b)}{t}$$

Exemple 1 : Calculer les dérivées partielles

a) $f : (x, y) \mapsto x^3y + e^{xy^2} + x$

1 Dérivées partielles

Cadre

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction
- (a, b) est un point de U .

Définition 1

Lorsqu'elles existent et sont finies :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b+t) - f(a, b)}{t}$$

Exemple 1 : Calculer les dérivées partielles

$$\text{b) } g : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1 Dérivées partielles

Définition 2

f est de classe \mathcal{C}^1 sur U si :

1 Dérivées partielles

Définition 2

f est de classe \mathcal{C}^1 sur U si : $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies et continues sur U

1 Dérivées partielles

Définition 2

f est de classe \mathcal{C}^1 sur U si : $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies et continues sur U

Exemple 2 : $f : (x, y) \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}{e^x + y^2}$

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

1 Dérivées partielles

Définition 2

f est de classe \mathcal{C}^1 sur U si : $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies et continues sur U

Exemple 3

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Que peut-on dire de f ?

2 Problèmes d'extremums

Théorème 1 : Condition nécessaire d'extremum local

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U et admet un extremum local en $p = (a, b)$, alors :

2 Problèmes d'extremums

Théorème 1 : Condition nécessaire d'extremum local

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U et admet un extremum local en

$$p = (a, b), \text{ alors : } \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

2 Problèmes d'extremums

point critique de f

Théorème 1 : Condition nécessaire d'extremum local

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U et admet un extremum local en

$p = (a, b)$, alors :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

2 Problèmes d'extremums

point critique de f

Théorème 1 : Condition nécessaire d'extremum local

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U et admet un extremum local en

$$p = (a, b), \text{ alors : } \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

Exercice 1

Démontrer ce théorème

2 Problèmes d'extremums

Théorème 1 : Condition nécessaire d'extremum local

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U et admet un extremum local en

$$p = (a, b), \text{ alors : } \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

SF 7 : Déterminer les extremums locaux de f sur un ouvert U

Exemple 4 : Etudier les extremums de f

a) $f : (x, y) \mapsto x^2 - 3x + xy + y^2$

► Figure

2 Problèmes d'extremums

Théorème 1 : Condition nécessaire d'extremum local

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U et admet un extremum local en

$$p = (a, b), \text{ alors : } \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

SF 7 : Déterminer les extremums locaux de f sur un ouvert U

Exemple 4 : Etudier les extremums de f

b) $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$

► Figure

3 Développement limité à l'ordre 1

Cadre

- f est de classe \mathcal{C}^1 sur U
- (a, b) est un point de U .

Définition 3

f admet en (a, b) le développement limité à l'ordre 1 :

3 Développement limité à l'ordre 1

Cadre

- f est de classe \mathcal{C}^1 sur U
- (a, b) est un point de U .

Définition 3

f admet en (a, b) le développement limité à l'ordre 1 :

$$f(a+h, b+k) \underset{\|(h,k)\| \rightarrow 0}{=} f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + o(\|(h, k)\|)$$

3 Développement limité à l'ordre 1

Cadre

- f est de classe \mathcal{C}^1 sur U
- (a, b) est un point de U .

On approche f
au voisinage de (a, b)

f admet en (a, b) le développement limité à l'ordre 1 :

$$f(a+h, b+k) \underset{\|(h,k)\| \rightarrow 0}{=} f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + o(\|(h, k)\|)$$

3 Développement limité à l'ordre 1

Cadre

- f est de classe \mathcal{C}^1 sur U
- (a, b) est un point de U .

On approche f
au voisinage de (a, b)

$(h, k) \mapsto L(h, k)$
linéaire en (h, k)

f admet en (a, b) le développement limité à l'ordre 1 :

$$f(a+h, b+k) \underset{\|(h,k)\| \rightarrow 0}{=} f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + o(\|(h, k)\|)$$

Vocabulaire. Plan tangent à f en (a, b)

plan d'équation :
$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

3 Développement limité à l'ordre 1

Cadre

- f est de classe \mathcal{C}^1 sur U
- (a, b) est un point de U .

On approche f
au voisinage de (a, b)

$(h, k) \mapsto L(h, k)$
linéaire en (h, k)

« petit »
terme correctif

f admet en (a, b) le développement limité à l'ordre 1 :

$$f(a+h, b+k) \underset{\|(h,k)\| \rightarrow 0}{=} f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + o(\|(h, k)\|)$$

Vocabulaire. Plan tangent à f en (a, b)

plan d'équation : $z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$

3 Développement limité à l'ordre 1

Cadre

- f est de classe \mathcal{C}^1 sur U
- (a, b) est un point de U .

On approche f
au voisinage de (a, b)

$(h, k) \mapsto L(h, k)$
linéaire en (h, k)

« petit »
terme correctif

f admet en (a, b) le développement limité à l'ordre 1 :

$$f(a+h, b+k) \underset{\|(h,k)\| \rightarrow 0}{=} f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + o(\|(h, k)\|)$$

Vocabulaire. Plan tangent à f en (a, b)

plan d'équation : $z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$

3 Développement limité à l'ordre 1

Cadre

- f est de classe \mathcal{C}^1 sur U
- (a, b) est un point de U .

On approche f
au voisinage de (a, b)

$(h, k) \mapsto L(h, k)$
linéaire en (h, k)

« petit »
terme correctif

f admet en (a, b) le développement limité à l'ordre 1 :

$$f(a+h, b+k) \underset{\|(h,k)\| \rightarrow 0}{=} f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + o(\|(h, k)\|)$$

Vocabulaire. Plan tangent à f en (a, b)

plan d'équation :
$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

Exemple 5 : $f : (x, y) \mapsto \text{Arctan}(x + 2y)$ ▶ Figure

Trouver une équation du plan tangent à f en $(0, 0)$

3 Développement limité à l'ordre 1

Définition 4

Le *gradient* de f en (a, b) est le *vecteur* :

3 Développement limité à l'ordre 1

Définition 4

Le *gradient* de f en (a, b) est le *vecteur* :

$$\nabla f(a, b) \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)$$

3 Développement limité à l'ordre 1

Définition 4

Le *gradient* de f en (a, b) est le vecteur :

$$\nabla f(a, b) \stackrel{\text{déf.}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)$$

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + o(\|(h, k)\|)$$

Réécriture du développement limité

3 Développement limité à l'ordre 1

Définition 4

Le *gradient* de f en (a, b) est le vecteur :

$$\nabla f(a, b) \stackrel{\text{déf.}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)$$

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + o(\|(h, k)\|)$$

Réécriture du développement limité

$$f(a+h, b+k) \underset{\|(h,k)\| \rightarrow 0}{=} f(a, b) +$$

3 Développement limité à l'ordre 1

Définition 4

Le *gradient* de f en (a, b) est le vecteur :

$$\nabla f(a, b) \stackrel{\text{déf.}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)$$

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + o(\|(h, k)\|)$$

Réécriture du développement limité

$$f(a+h, b+k) \underset{\|(h,k)\| \rightarrow 0}{=} f(a, b) + (\nabla f(a, b) \mid (h, k)) + o(\|(h, k)\|)$$

III Dérivation des fonctions composées

I Fonction continue à deux variables

II Dériver une fonction de deux variables

III Dérivation des fonctions composées

1 Composition avec une fonction d'une variable

$$I \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{R}$$

1 Composition avec une fonction d'une variable

$$I \xrightarrow{x,y} U \longrightarrow \mathbb{R}$$

1 Composition avec une fonction d'une variable

$$\begin{array}{l} I \xrightarrow{x,y} U \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto (x(t), y(t)) \end{array}$$

1 Composition avec une fonction d'une variable

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{x,y} & U & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) & \longmapsto & f(x(t), y(t)) \end{array}$$

1 Composition avec une fonction d'une variable

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \curvearrowright & \\ I & \xrightarrow{x,y} & U & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) & \longmapsto & f(x(t), y(t)) \end{array}$$

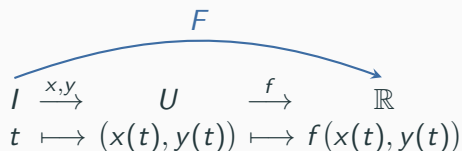
1 Composition avec une fonction d'une variable

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \curvearrowright & \\ I & \xrightarrow{x,y} & U & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) & \mapsto & f(x(t), y(t)) \end{array}$$

Théorème 1 : Règle de la chaîne

$F : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $t \in I$:

1 Composition avec une fonction d'une variable



Théorème 1 : Règle de la chaîne

$F : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $t \in I$:

$$F'(t) = x'(t)$$

1 Composition avec une fonction d'une variable

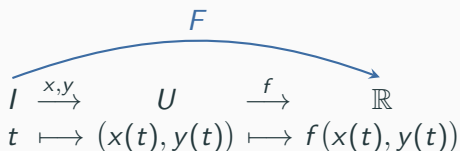
$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \curvearrowright & \\ I & \xrightarrow{x,y} & U & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) & \mapsto & f(x(t), y(t)) \end{array}$$

Théorème 1 : Règle de la chaîne

$F : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $t \in I$:

$$F'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))$$

1 Composition avec une fonction d'une variable

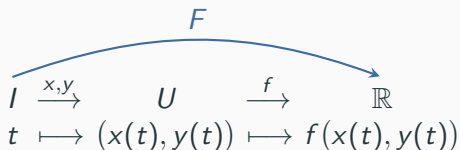


Théorème 1 : Règle de la chaîne

$F : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $t \in I$:

$$F'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

1 Composition avec une fonction d'une variable



Théorème 1 : Règle de la chaîne

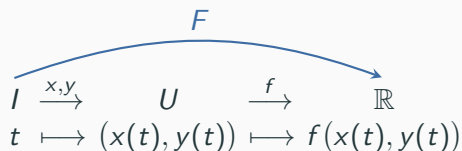
$F : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $t \in I$:

$$F'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

Exemple 1 : $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

Montrer que $F : t \mapsto f(t^2, \sin 2t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer F' .

1 Composition avec une fonction d'une variable



Théorème 1 : Règle de la chaîne

$F : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $t \in I$:

$$F'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

Exemple 2 : $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifie l'équation de transport

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $u(x + ct, t) = u(x, 0)$.

1 Composition avec une fonction d'une variable

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \curvearrowright & \\ I & \xrightarrow{x,y} & U & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) & \mapsto & f(x(t), y(t)) \end{array}$$

Théorème 1 : Règle de la chaîne

$F : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $t \in I$:

$$F'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

Exercice 1

Démontrer la règle de la chaîne.

1 Composition avec une fonction d'une variable

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \curvearrowright & \\ I & \xrightarrow{x,y} & U & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) & \mapsto & f(x(t), y(t)) \end{array}$$

Théorème 1 : Règle de la chaîne

$F : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $t \in I$:

$$F'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

Exercice 1

Démontrer la règle de la chaîne.

$$f(x(t) + u, y(t) + v) = f(x(t), y(t)) + u \partial_x f + v \partial_y f + o(\|(u, v)\|)$$

1 Composition avec une fonction d'une variable

Théorème 2 : Règle de la chaîne

$F : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $t \in I$:

$$F'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

Expression à l'aide du gradient

► Figure

Si l'on pose $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ pour tout $t \in I$, alors $F = f \circ \gamma$ et

la formule s'écrit :

$$(f \circ \gamma)'(t) =$$

1 Composition avec une fonction d'une variable

Théorème 2 : Règle de la chaîne

$F : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $t \in I$:

$$F'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

Expression à l'aide du gradient

► Figure

Si l'on pose $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ pour tout $t \in I$, alors $F = f \circ \gamma$ et

la formule s'écrit :

$$(f \circ \gamma)'(t) = (\nabla f(\gamma(t)) \mid \gamma'(t))$$

1 Composition avec une fonction d'une variable

Théorème 2 : Règle de la chaîne

$F : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $t \in I$:

$$F'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

Expression à l'aide du gradient

► Figure

Si l'on pose $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ pour tout $t \in I$, alors $F = f \circ \gamma$ et

la formule s'écrit :

$$(f \circ \gamma)'(t) = (\nabla f(\gamma(t)) \mid \gamma'(t))$$

ligne de niveau de f

Exercice 2 : $\mathcal{C}_k = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = k\}$

► Figure

On suppose que γ est à valeurs dans \mathcal{C}_k . Montrer :

$$\forall t \in I, \quad \nabla f(\gamma(t)) \perp \gamma'(t)$$

2 Dérivée selon un vecteur

Cadre

- $p = (a, b) \in U$.
- $v = (h, k)$ est un vecteur de \mathbb{R}^2

2 Dérivée selon un vecteur

Cadre

- $p = (a, b) \in U$.
- $v = (h, k)$ est un vecteur de \mathbb{R}^2

Théorème 3 : [▶ Figure](#)

$\varphi_v : t \mapsto f(p + tv)$ est dérivable en 0 et

2 Dérivée selon un vecteur

Cadre

- $p = (a, b) \in U$.
- $v = (h, k)$ est un vecteur de \mathbb{R}^2

Théorème 3 :

$\varphi_v : t \mapsto f(p + tv)$ est dérivable en 0 et

$$\varphi'_v(0) = h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = (\nabla f(a, b) \mid v)$$

2 Dérivée selon un vecteur

dérivée de f selon le vecteur v
notée $D_v f(p)$

Cadre

- $p = (a, b) \in U$.
- $v = (h, k)$ est un vecteur de \mathbb{R}^2

Théorème 3 : [▸ Figure](#)

$\varphi_v : t \mapsto f(p + tv)$ est dérivable en 0 et

$$\varphi'_v(0) = h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = (\nabla f(a, b) \mid v)$$

2 Dérivée selon un vecteur

dérivée de f selon le vecteur v
notée $D_v f(p)$

Cadre

- $p = (a, b) \in U$.
- $v = (h, k)$ est un vecteur de \mathbb{R}^2

Théorème 3 : [Figure](#)

$\varphi_v : t \mapsto f(p + tv)$ est dérivable en 0 et

$$\varphi'_v(0) = h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = (\nabla f(a, b) \mid v)$$

Exercice 3

Démontrer le théorème à l'aide de la règle de la chaîne.

2 Dérivée selon un vecteur

dérivée de f selon le vecteur v
notée $D_v f(p)$

Cadre

- $p = (a, b) \in U$.
- $v = (h, k)$ est un vecteur de \mathbb{R}^2

Théorème 3 : [▶ Figure](#)

$\varphi_v : t \mapsto f(p + tv)$ est dérivable en 0 et

$$\varphi'_v(0) = h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = (\nabla f(a, b) \mid v)$$

Exercice 4 : Gradient et direction de plus forte pente [▶ Figure](#)

On fixe $p = (a, b) \in U$. Déterminer : $\max \{D_v f(p) ; \|v\| = 1\}$.

3 Composition avec une fonction de deux variables

$$V \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{R}$$

3 Composition avec une fonction de deux variables

$$V \xrightarrow{x,y} U \longrightarrow \mathbb{R}$$

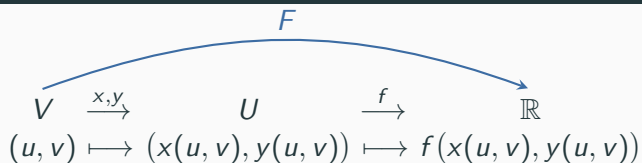
3 Composition avec une fonction de deux variables

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{x,y} & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & (x(u, v), y(u, v)) & & \end{array}$$

3 Composition avec une fonction de deux variables

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{x,y} & U & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & (x(u, v), y(u, v)) & \longmapsto & f(x(u, v), y(u, v)) \end{array}$$

3 Composition avec une fonction de deux variables



3 Composition avec une fonction de deux variables

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \curvearrowright & \\ V & \xrightarrow{x,y} & U & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & (x(u, v), y(u, v)) & \mapsto & f(x(u, v), y(u, v)) \end{array}$$

Théorème 4 : Règle de la chaîne

F est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $(u, v) \in V$:

3 Composition avec une fonction de deux variables

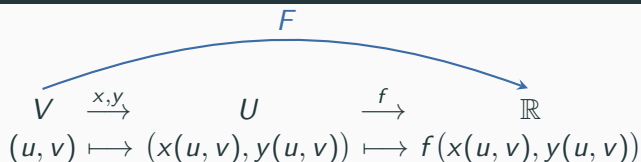
$$\begin{array}{ccccc} & & F & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ V & \xrightarrow{x,y} & U & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & (x(u, v), y(u, v)) & \mapsto & f(x(u, v), y(u, v)) \end{array}$$

Théorème 4 : Règle de la chaîne

F est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $(u, v) \in V$:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) =$$

3 Composition avec une fonction de deux variables

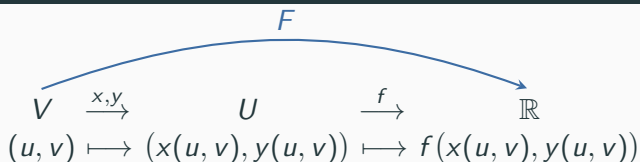


Théorème 4 : Règle de la chaîne

F est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $(u, v) \in V$:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$

3 Composition avec une fonction de deux variables

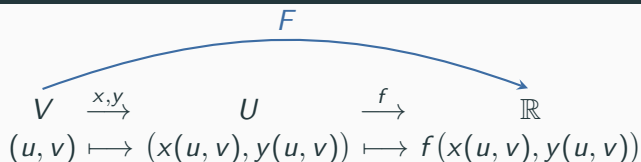


Théorème 4 : Règle de la chaîne

F est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $(u, v) \in V$:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$
$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v)$$

3 Composition avec une fonction de deux variables

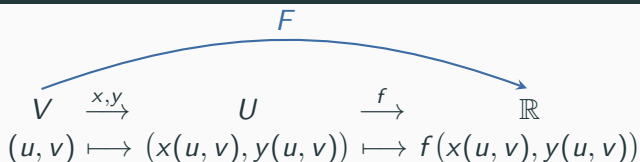


Théorème 4 : Règle de la chaîne

F est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $(u, v) \in V$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{aligned}$$

3 Composition avec une fonction de deux variables



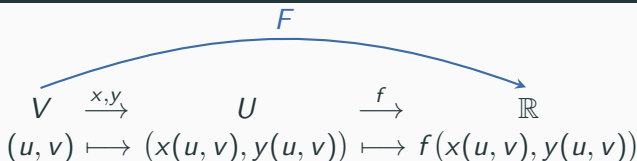
Théorème 4 : Règle de la chaîne

F est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $(u, v) \in V$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{aligned}$$

En résumé :

3 Composition avec une fonction de deux variables



Théorème 4 : Règle de la chaîne

F est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $(u, v) \in V$:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$$

En résumé :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

3 Composition avec une fonction de deux variables

Théorème 4 : Règle de la chaîne

F est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $(u, v) \in V$:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$$

En résumé :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

Exemple 3 : $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$

Calculer $\nabla f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ en fonction de $\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta)$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta)$