

En route pour le niveau 7 :

■ Comment franchir l'étape 1

(Niveau 5)

- Traitez l'exercice 1 ci-dessous et remettez moi votre copie.
- Si elle est correctement rédigée et proprement présentée, elle vous permettra d'atteindre le niveau 5.
- La date limite est le 11 juin^a

■ Comment franchir l'étape 2

(Niveau 7)

- Une fois l'étape 1 franchie^b, vous recevrez un lien vers l'énoncé d'un nouvel exercice.
- Si vous réussissez à traiter ce nouvel exercice, vous atteindrez le niveau 7

a. Il faut rendre plus tôt si vous envisagez de franchir l'étape 2.

b. i.e. une fois que vous avez rendu l'exercice 1 et que celui-ci a été corrigé

Exercice 1 —

— Partie I —

Soit E un espace préhilbertien réel et $u_1, \dots, u_n \in E$. Soient $u_1, \dots, u_n \in E$.

On note $D(u_1, \dots, u_n)$ le déterminant de la matrice des produits scalaires : $\left((u_i | u_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

- On souhaite montrer que $D(u_1, \dots, u_n) \geq 0$ avec égalité si et seulement si la famille (u_1, \dots, u_n) est liée.
 - Montrer le résultat dans le cas où (u_1, \dots, u_n) est liée.
 - On suppose que (u_1, \dots, u_n) est libre et on considère une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ la matrice de la famille (u_1, \dots, u_n) dans la base \mathcal{B} . Exprimer la matrice $M = \left((u_i | u_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ en fonction de A et de A^T . En déduire que $D(u_1, \dots, u_n) > 0$.
- Soit F un sous-espace de E et (v_1, \dots, v_p) une base quelconque de F (pas supposée orthonormée). Montrer que pour tout $x \in E$: $D(x, v_1, \dots, v_p) = d(x, F)^2 \times D(v_1, \dots, v_p)$.

— Partie II —

Pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ tels que : $a_i + b_j \neq 0$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\mathcal{C}_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ le déterminant de la matrice $\left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

- Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ tels que : $a_i + b_j \neq 0$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On suppose a_1, \dots, a_n distincts, ainsi que b_1, \dots, b_n .
 - Justifier que $R(X) = \mathcal{C}_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}, X)$ est bien une fraction rationnelle.
 - Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $R(X) = \lambda \frac{(X - b_1) \dots (X - b_{n-1})}{(X + a_1) \dots (X + a_n)}$.
 - En déduire une expression de $\mathcal{C}_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ en fonction de $\mathcal{C}_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1})$.

$$4. \text{ Montrer que : } \det \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)},$$

pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ vérifiant : $a_i + b_j \neq 0$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$