Devoir maison n° 21 – Etape 1

En route pour le niveau 6 :

- **Comment franchir l'étape 1** **(Niveau 4)**
  - Traitez l'exercice 1 ci-dessous et remettez moi votre copie.
  - Si elle est correctement rédigée et proprement présentée, elle vous permettra d'atteindre le niveau 4.
  - La date limite est le 11 juin [a]
- **Comment franchir l'étape 2** **(Niveau 6)**
  - Une fois l'étape 1 franchie [b], vous recevrez un lien vers l'énoncé d'un nouvel exercice.
  - Si vous réussissez à traiter ce nouvel exercice, vous atteindrez le niveau 6

a. Il faut rendre plus tôt si vous envisagez de franchir l'étape 2.
b. *i.e.* une fois que vous avez rendu l'exercice 1 et que celui-ci a été corrigé

Exercice 1 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose : $\quad (P \mid Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x.$

1. Justifier que $(P, Q) \mapsto (P \mid Q)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Justifier qu'il existe une base orthonormée $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que : $\quad \forall k \in [\![0, n]\!] : \quad \deg P_k = k.$
3. Calculer $(P_n \mid Q)$ pour $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4. Montrer que P_n possède n racines distinctes dans $[-1, 1]$. *Indication : Considérer le polynôme* $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - x_i)$ *où* $x_1 < \dots < x_p$ *sont les racines de* P_n *dans* $[-1, 1]$ *en lesquelles* P_n *change de signe.*
5. On note $x_1 < \dots < x_n$ les n racines distinctes de P_n.
   Montrer qu'il existe $\delta_1, \dots, \delta_n \in \mathbb{R}$ tels que : $\quad \forall B \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \displaystyle\int_{-1}^{1} B(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \delta_i B(x_i).$
6. Montrer : $\quad \forall B \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad \displaystyle\int_{-1}^{1} B(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \delta_i B(x_i).$ *Indication : Effectuer une division euclidienne*
7. Démontrer : $\quad \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \delta_k \geq 0.$