

En route pour le niveau 7 :

■ Comment franchir l'étape 1

(Niveau 5)

- Traitez l'exercice 1 ci-dessous et remettez moi votre copie.
- Si elle est correctement rédigée et proprement présentée, elle vous permettra d'atteindre le niveau 5.
- La date limite est le 28 mai^a

■ Comment franchir l'étape 2

(Niveau 7)

- Une fois l'étape 1 franchie^b, vous recevrez un lien vers l'énoncé d'un nouvel exercice.
- Si vous réussissez à traiter ce nouvel exercice, vous atteindrez le niveau 7

a. Il faut rendre plus tôt si vous envisagez de franchir l'étape 2.

b. i.e. une fois que vous avez rendu l'exercice 1 et que celui-ci a été corrigé

Exercice 1 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $n + 1$ variables aléatoires X_1, \dots, X_{n+1} définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. D'après le principe des tiroirs, au moins deux des variables X_1, \dots, X_{n+1} sont égales.

On note T_n le plus petit entier $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$ pour lequel il existe $i \in \llbracket 1, k - 1 \rrbracket$ tel que $X_k = X_i$

1. Soit $k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$. On note \mathcal{A}_n^k l'ensemble des k -arrangements de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et pour tout $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{A}_n^k$, on pose : $A_{(i_1, \dots, i_k)} = \{X_1 = i_1\} \cap \dots \cap \{X_k = i_k\}$.

a) Exprimer $\{T_n > k\}$ en fonction des $A_{(i_1, \dots, i_k)}$ pour $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{A}_n^k$.

b) En déduire que :
$$P(T_n > k) = \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right).$$

2. Soit $t > 0$. Majorer $\left| \ln(P(T_n > t\sqrt{n})) + \sum_{i=0}^{\lfloor t\sqrt{n} \rfloor - 1} \frac{i}{n} \right|$ lorsque $n \geq 4t^2$ puis en déduire que : $P(T_n > t\sqrt{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\int_0^x t^k e^{-t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} k!$.

4. Montrer que : $\int_0^x e^{n(\ln(1+t)-t)} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{E(T_n)}{n}$. On pourra librement utiliser l'égalité : $E(T_n) = \sum_{k=0}^n P(T_n > k)$.

En admettant que $\int_0^x e^{-t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ on peut en déduire que $E(T_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$: ce n'est ici pas demandé.