En route pour le niveau 6 :

- **Comment franchir l'étape 1** **(Niveau 4)**
  - Traitez l'exercice 1 ci-dessous et remettez moi votre copie.
  - Si elle est correctement rédigée et proprement présentée, elle vous permettra d'atteindre le niveau 4.
  - La date limite est le 28 mai [a]
- **Comment franchir l'étape 2** **(Niveau 6)**
  - Une fois l'étape 1 franchie [b], vous recevrez un lien vers l'énoncé d'un nouvel exercice.
  - Si vous réussissez à traiter ce nouvel exercice, vous atteindrez le niveau 6

a. Il faut rendre plus tôt si vous envisagez de franchir l'étape 2.
b. *i.e.* une fois que vous avez rendu l'exercice 1 et que celui-ci a été corrigé

Exercice 1 — Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.
L'objectif est de construire une suite (p_n) de fonctions polynomiales sur $[0,1]$ telle que : $\|f - p_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On pose pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$: $\quad p_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$ fixés. On se donne une variable aléatoire S_n de loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$.

a) Montrer que : $\quad |p_n(x) - f(x)| \leq E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right)$.

b) Justifier l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\quad \forall x, y \in [0,1], \quad |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

c) On pose : $\quad A = \left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| < \alpha\right\}$. $\quad$ Montrer que : $\quad E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_A\right) \leq \varepsilon$.

d) En déduire que : $\quad |p_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \dfrac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$.

2. Montrer que la suite (p_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$ *i.e.* : $\quad \|f - p_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$