En route pour le niveau 4 :

Comment franchir l'étape 1 (Niveau 4)

- *franchissement « intermédiaire »*
  - Traitez l'exercice 1 ci-dessous et remettez moi votre copie.
  - Si elle est correctement rédigée et proprement présentée, elle vous permettra d'atteindre le niveau 1.
- *franchissement « complet »*
  - Traitez les exercices 1 et 2 ci-dessous et remettez moi votre copie.
  - Si elle est correctement rédigée et proprement présentée, elle vous permettra d'atteindre le niveau 2.
- La date limite est le 28 mai [a]

Comment franchir l'étape 2 (Niveau 4)

- Une fois l'étape 1 franchie [b], vous recevrez un lien vers l'énoncé d'un nouvel exercice.
- Si vous réussissez à traiter ce nouvel exercice, vous atteindrez le niveau 4

a. Il faut rendre plus tôt si vous envisagez de franchir l'étape 2.
b. *i.e.* une fois que vous avez rendu les exercices 1 et 2 et que ceux-ci ont été corrigés

Le cadre

Afin de préparer une salle pour le jeu *Fort Boyard*, on dispose de N jarres opaques numérotées de 1 à N avec $N \geq 2$ dans lesquelles on place successivement n scorpions.

Chaque scorpion est placé au hasard dans une des N jarres (une jarre peut contenir plusieurs scorpions)

On note J_n le nombre de jarres non vides (*i.e.* contenant au moins un scorpion) une fois les n scorpions répartis.

Les énoncé

Exercice 1 —

1. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs prises par J_n (distinguer deux cas : $n > N$ et $n \leq N$)
2. Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, $\quad P(J_{n+1} = k) = \dfrac{k}{N} P(J_n = k) + \dfrac{N-k+1}{N} P(J_n = k-1)$.

Exercice 2 — On considère la fonction polynomiale G_n définie par $G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P(J_n = k) x^k$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{n+1}(x) = \dfrac{1}{N}(x - x^2) G_n'(x) + x G_n(x)$
2. En déduire que : $\quad E(J_{n+1}) = (1 - \dfrac{1}{N}) E(J_n) + 1$.
3. Déterminer une expression de $E(J_n)$ en fonction de n et N.