Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

Exercice de cours

Exercice 1 *Chap 28-I, déf. 1 et th. 1* — Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$, continue par morceaux.
1. Donner l'expression des sommes de Riemann de f
2. Démontrer le résultat de convergence dans le cas où f est lipschitzienne.

Exercice 2 *Chap 28-II, déf. 1 et th. 1* — Enoncer la formule de Taylor à reste intégral (avec ses hypothèses) et démontrer cette formule.

Exercice 3 *Exemple de cours, Chap 28-II* — En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à une fonction bien choisie, montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^z$.

Exercice 4 *Exemple de cours, Chap 28-III* — Soit $\alpha \in]0,1[$. A l'aide d'une comparaison somme-intégrale, déterminer un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 5 *Résultat de cours, Chap 28-III,* — Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, positive décroissante. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,dt + \ell + o(1)$.

Exercice 6 *Chap 28-IV, th. 1* — Enoncer et démontrer le théorème de Heine

APPROXIMATIONS

1 Sommes de Riemann

- **Cadre.** f est une fonction continue par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les *sommes de Riemann* de f (à gauche et à droite) sont les deux sommes : $R_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ et $S_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$

- **Remarques:**
  1. Les points $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ forment une subdivision de $[a,b]$ dite régulière car les segments $[x_k, x_{k+1}]$ sont de mêmes longueurs $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$.
  2. Les quantités sommées dans $R_n(f)$ et $S_n(f)$ ont des interprétations en termes d'aires sur chaque $[x_k, x_{k+1}]$. Par exemple, dans $R_n(f)$, chaque terme $\frac{b-a}{n} \times f(x_k)$ est l'aire du rectangle de base $[x_k, x_{k+1}]$ et de hauteur $f(x_k)$.

Théorème

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Les suites $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent et : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t)\,dt$

- **Cas particulier très important.** Très souvent, on peut choisir $[a,b] = [0,1]$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,dt$$

- **Estimation de l'erreur d'approximation.** Si f est M-lipschitzienne pour un certain $M \in \mathbb{R}_+^*$: $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt - R_n(f)\right| \leq \dfrac{M}{n}$.

Autrement dit : $\boxed{R_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right)}$

2 Formules de Taylor globales

- **Cadre.** • $n \in \mathbb{N}$ • I est un intervalle non vide, non réduit à un point • $a, b \in I$ • $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction

Théorème : Formule de Taylor à reste intégral

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I : $f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$

Théorème : Inégalité de Taylor-Lagrange

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et si M_{n+1} majore $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[a,b]$ (ou $[b,a]$)

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

3 Etude de sommes par recours aux intégrales

3.1 La ruse de l'intégrale de t^k

Mettre une somme sous forme intégrale

- On écrit : $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$
- on utilise la linéarité de l'intégrale : « $\sum \int ... = \int \sum ...$ »

3.2 Encadrement d'une somme par une intégrale

- **Cadre.** On étudie une somme de la forme $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ où f est une fonction monotone.

En pratique – retenir les étapes clés :

Pour encadrer $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ où $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ décroît :

- La décroissance de f assure que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k)$
- La sommation de ces inégalités permet ainsi de majorer ou minorer $\sum_{k=0}^{n} f(k)$.

- **Remarque.** Si f est croissante, le raisonnement s'adapte.

3.3 Développement asymptotique somme-intégrale

En pratique – retenir les étapes clés :

Pour montrer que $\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)$ où $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ décroît.

En posant $a_k = \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t - f(k)$ et $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$:

1. A l'aide de la relation de Chasles : $\sum_{k=0}^{n} f(k) = f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t - A_n$
2. Avec la décroissance de f, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq a_k \leq f(k-1) - f(k)$
3. On applique le théorème de la limite monotone à la suite (A_n)

- **Développement asymptotique de la somme harmonique,constante d'Euler.**

Appliqué avec $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[1, +\infty[$ on obtient : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)}$

4 Approximation d'une fonction continue par morceaux

4.1 Continuité uniforme

Définition

$f : I \to \mathbb{K}$ est *uniformément continue* sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \ \mid\ \forall x, y \in I, \quad |y - x| \leq \alpha \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

- **Interprétation.** α ne dépend que de ε, cette réponse de continuité est ainsi *uniforme* par rapport à x.
- **Remarques:**
  1. Si f est uniformément continue sur I alors elle y est continue
  2. Si f est lipshitzienne sur I alors elle y est uniformément continue.

Théorème : (Heine)

Si f est continue sur un segment $[a, b]$, alors elle y est uniformément continue.

4.2 Approximation uniforme par des fonctions en escalier

- **Cadre.** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$
- **Rappel.** f est bornée sur $[a, b]$.
- **Notation .** $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$

Théorème

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe une fonction φ en escalier sur $[a, b]$ telle que : $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$ c'est à dire : $\forall x \in [a, b], \quad |\varphi(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

- **Conséquence.** Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a, b]$ telle que $\|f - \varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Conséquence (rappel) : intégrale d'une fonction continue par morceaux

La suite des intégrales de fonctions en escalier $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. De plus sa limite ne dépend pas du choix de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci permet de définir l'intégrale de f : c'est la limite de $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour *n'importe quelle* suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f.