

1. Procéder par opérations pour le caractère \mathcal{C}^1 (avec une composition pour $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$).

Réponse : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$

2. • Existence des dérivées partielles.
Etudier les limites en 0 des taux d'accroissements
- $$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} \quad \text{et} \quad \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t}$$
- f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 .
Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$ par exemple en montrant que $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, t)$ n'est pas continue en 0.

2. 1. Réponse : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-2xy^4 + y^5}{(x^2 + y^2 - xy)^2}$
et : $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y^5 - 3xy^4 + 4x^2y^3}{(x^2 + y^2 - xy)^2}$

2. Etudier les limites en 0 des taux d'accroissements
- $$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} \quad \text{et} \quad \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t}$$
3. Il s'agit de montrer la continuité en $(0, 0)$ de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Par exemple, pour $\frac{\partial f}{\partial x}$, étant donné $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, en posant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, chercher une majoration de la forme : $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| \leq \varepsilon(r)$ où $\varepsilon(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$.

Pour cela :

- Se rappeler que $|y| \leq r$
- Montrer que $x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}r^2$.

3. 1. Réponse : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$
et : $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$

2. Etudier les limites en 0 des taux d'accroissements
- $$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} \quad \text{et} \quad \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t}$$
3. Il s'agit de montrer la continuité en $(0, 0)$ de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Par exemple, pour $\frac{\partial f}{\partial x}$, étant donné $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, en posant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, chercher une majoration de la forme : $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| \leq \varepsilon(r)$ où $\varepsilon(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$.

4. 1. Exprimer g en fonction d'une primitive F de f .

Réponse à trouver :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{g(x, y) - f(x)}{y - x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{g(x, y) - f(y)}{x - y}$$

2. Etudier les limites en 0 des taux d'accroissements

$$\frac{g(a+t, a) - f(a, a)}{t} \quad \text{et} \quad \frac{g(a, a+t) - f(a, a)}{t}$$

Par exemple, pour $\frac{\partial g}{\partial x}(a, a)$, exprimer $\frac{g(a+t, a) - f(a, a)}{t}$ en fonction de F puis faire un développement limité à l'ordre 2 au numérateur de F en a à l'aide de la formule de Taylor-Young.

Réponse à trouver : $\frac{\partial g}{\partial x}(a, a) = \frac{\partial g}{\partial y}(a, a) = \frac{1}{2}f'(a)$

3. En utilisant les expressions trouvées aux questions 1 et 2 et en exprimant g à l'aide de F on obtient :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) = \frac{F(y) - F(x) - F'(x)(y-x)}{(y-x)^2} - \frac{1}{2}f'(a)$$

On peut écrire $F(y) - F(x) - F'(x)(y-x)$ sous la forme d'une intégrale en appliquant la formule de Taylor à reste intégral à l'ordre 1 entre les points x et y .

4. Il reste à montrer que chaque fonction $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ est continue en (a, a) pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Revenir pour cela à la définition de la continuité.

Par exemple pour $\frac{\partial g}{\partial x}$, étant fixé $\varepsilon > 0$, il s'agit de prouver qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall u = (x, y) \in B((a, a), \alpha), \quad \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) \right| \leq \varepsilon$$

Utiliser l'expression de la question précédente en traduisant la continuité de f' en a i.e. la fait que $f'(t) \xrightarrow{t \rightarrow a} f'(a)$.

5. Exprimer φ à l'aide d'une primitive F de f .

6. 1. Réponse : $z = 2x$

2. Il s'agit à k fixé de résoudre l'équation $f(x, y) = k$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ puis de reconnaître géométriquement l'ensemble des solutions.

Réponse :

- Si $k \geq -1 + e^{-1}$:
c'est le cercle de centre $(-1, 0)$ et de rayon $\sqrt{\ln(1+k) + 1}$.
- Si $k < -1 + e^{-1}$: c'est l'ensemble vide.

7. Utiliser la règle de la chaîne.

8. Utiliser la règle de la chaîne.

1. Réponse :

$$\psi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, f(x, x)) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x) \right) \frac{\partial f}{\partial y}(x, f(x, x))$$

2. a)

b) Réponse :

$$\bullet \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, f(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, f(x, x))$$

$$\bullet \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, f(x, x))$$

- 9** **1. a)** Montrer que φ' est décroissante *i.e.* montrer que pour tous $s, t \in [0, 1]$ tels que $s < t$: $\varphi'(s) \geq \varphi'(t)$.
b) Utiliser l'inégalité des tangentes.
2. Prendre $q = p - \frac{1}{L} \nabla f(p)$ dans l'inégalité de la **1b)**.

10 **1. a)** L'associativité de \star permet d'écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(x \star y, t) = f(x, f(y, t))$$

Dériver cette égalité par rapport à t .

- b)** Par l'absurde, montrer avec **1a)** que si $\frac{\partial f}{\partial y}(t, e) = 0$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$, alors $\frac{\partial f}{\partial y}(e, e) = 0$ (évaluer l'égalité de **1a)** en x et y bien choisis).
 Prouver par ailleurs que $\frac{\partial f}{\partial y}(e, e) = 1$ en exploitant l'égalité $f(e, x) = x$.

- 2. a)** Appliquer le théorème fondamental de l'analyse.
b) Avec la relation de Chasles :

$$\Phi(x \star y) = \Phi(x) + \int_x^{x \star y} \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}(t, e)} dt$$

puis effectuer le changement de variable $t = x \star s$ dans la seconde intégrale.

11 **a)** Un seul point critique : $(0, 3)$
 C'est un minimum global.

- b)** Deux points critiques :
 • $(0, 0)$ qui est un minimum global.
 • $(-\frac{2}{3}, 0)$ qui n'est pas un extremum.

- c)** Points critiques : $(n\pi, 0)$ où n décrit \mathbb{Z} .
 • Les $(2k\pi, 0)$ ne sont pas des extremums
 • Les $(2k\pi + \pi, 0)$ sont des minimums

12 **a)** Deux points critiques :

- $(0, 0)$ qui n'est pas un extremum.
- $(1, 1)$ qui n'est pas un extremum, par exemple en regroupant les termes comme suit :
 $f(1 + h, 1 + k) - f(1, 1) = h^3 + 3h^2 + k^3 + 2k^2 + (k^2 - 3hk)$
 puis en mettant le dernier terme sous forme canonique.

b) Un seul point critique : $(0, 0)$. Ce n'est pas un extremum, par exemple en considérant $f(x, 0)$ et $f(\frac{3}{2}y^2, y)$.

- c)** Trois points critiques :
 • $(0, 0)$ qui n'est pas un extremum.
 • $(1, 1)$ qui est un minimum : par exemple en utilisant l'inégalité $2hk \leq h^2 + k^2$.
 • $(-1, -1)$ qui est un minimum.

13 **1.** En posant $\gamma(t) = (1 - t)p + tq$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on obtient $\varphi = f \circ \gamma$ et on peut dériver cette expression à l'aide de la règle de la chaîne (utiliser la formule du III donnant l'expression à l'aide du gradient).
 Réponse à trouver : $\varphi'(t) = (\nabla f((1 - t)p + qt) | q - p)$

2. Supposer que f admet en $p \in \mathbb{R}^2$ un point critique. Fixer un point $q \in \mathbb{R}^2$ quelconque, il s'agit de montrer que : $f(q) \geq f(p)$. Avec les notations de la question 1 ceci revient à montrer que $\varphi(1) \geq \varphi(0)$.
 Pour ce faire, montrer que φ est une fonction croissante sur $[0, 1]$ en exploitant le résultat de la question **1.**

14

- Dériver la fonction φ à l'aide de la règle de la chaîne
- Appliquer le théorème des bornes atteintes à $g : \theta \mapsto f(\cos \theta, \sin \theta)$ sur $[0, 2\pi]$.
- Avec la question **2.**, il suffit de montrer que pour tout $(x, y) \in F$: $f(x, y) \geq \min_{(a,b) \in S} f(a, b)$.

Etant donné $(x, y) \in F$, poser :

$$a = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad b = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

de sorte que $(a, b) \in S$ et utiliser le résultat de **1.**

15

- Poser $A = \{f(x, y); (x, y) \in K\}$: c'est une partie de \mathbb{R} .
 Il s'agit de montrer que la partie A possède une borne supérieure.
- Procéder par l'absurde : si $M = f(x, y)$ pour un certain $(x, y) \in]0, 1[$, alors (x, y) serait un point critique de f .
- D'après la question qui précède, le maximum est atteint sur la frontière de K *i.e.* en un point de la forme $(x, 0)$ ou $(x, 1)$ ou $(0, y)$ ou $(1, y)$. Etudier la fonction f sur chacun des quatre « morceaux »

$$L_1 = \{(x, 0); x \in [0, 1]\}, \quad L_2 = \{(x, 1); x \in [0, 1]\}$$

$$L_3 = \{(0, y); y \in [0, 1]\} \quad \text{et} \quad L_4 = \{(1, y); y \in [0, 1]\}$$

on est ramené à l'étude d'une fonction d'une seule variable dans chaque cas.

- On peut utiliser la caractérisation séquentielle de la borne supérieure : il existe une suite $(z_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$. La suite (z_n) est donc de la forme $(f(x_n, y_n))$ pour certaines suites (x_n) et (y_n) à termes dans $[0, 1]$. En appliquant (deux fois) le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire des sous-suites $(x_{\varphi \circ \psi(n)})$ et $(y_{\varphi \circ \psi(n)})$ qui convergent respectivement vers x et y dans $[0, 1]$. Faire tendre n vers l'infini dans l'égalité

$$z_{\varphi \circ \psi(n)} = 2x_{\varphi \circ \psi(n)}^3 + 6x_{\varphi \circ \psi(n)}y_{\varphi \circ \psi(n)} - 3y_{\varphi \circ \psi(n)}^2 + 2$$

pour montrer que $M = f(x, y)$.

16

- Pour montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est $(\alpha - 1)$ -homogène : fixer $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ puis dériver par rapport à x l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

- Procéder de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$
- Pour obtenir l'identité d'Euler, fixer $x, y \in \mathbb{R}$ puis dériver par rapport à t (règle de la chaîne) l'égalité :

$$\forall t > 0, f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

- Fixer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ puis dériver la fonction $F : t \mapsto f(tx, ty)$. En utilisant la relation (\star) on montre que F est solution de l'équation différentielle $y' - \frac{\alpha}{t}y = 0$. Il suffit de résoudre l'équation (utiliser la valeur de $F(1)$ pour déterminer la constante).

- 17** 1. Procéder par analyse-synthèse. Dans l'analyse, étant fixé $y \in \mathbb{R}$, primitiver par rapport à x l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

On obtient une expression de $f(x, y)$ en fonction d'une constante $C(y)$ qui dépend a priori de y . En dérivant l'expression de $f(x, y)$ on constate que C est constante. Ne pas oublier la phase de synthèse.

Solutions : toutes les fonctions de la forme

$$(x, y) \mapsto -\text{Arctan} \frac{x}{y} + C$$

2. Procéder par l'absurde et dériver $F : t \mapsto f(\cos t, \sin t)$ avec la règle de la chaîne. On obtient : $F'(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Obtenir une contradiction en exploitant la 2π -périodicité de F .

- 18** Procéder par analyse-synthèse. Dans l'analyse, fixer v et dériver la fonction $u \mapsto F(u, v) = f(u, v - 2u)$.

On obtient : $\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = v - u$.

Primitiver par rapport à u : $F(u, v) = uv - \frac{u^2}{2} + C(v)$

où la « constante de primitivation C » dépend de v .

Déterminer $C(v)$ en prenant $u = 0$.

On « revient » à $f(x, y)$ en prenant $u = x$ et $v = y + 2x$.

Ne pas oublier la synthèse.

- 19** 1. Procéder par analyse-synthèse.

Dans l'analyse, fixer $x, y \in \mathbb{R}$ et montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto f(tx, ty)$ est constante (la valeur de la constante s'obtient en considérant $\varphi(0)$).

Ne pas oublier la synthèse.

On trouve que seule la fonction nulle est solution.

2. • Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, procéder par composition.

• En $(0, 0)$. Calculer d'abord $\frac{\partial h}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial h}{\partial y}(0, 0)$

(taux d'accroissements) puis majorer les quantités

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial h}{\partial x}(0, 0) \right| \text{ et } \left| \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial h}{\partial y}(0, 0) \right| \text{ en fonction de } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3. Il s'agit d'une équation linéaire et l'équation homogène a été résolue à la question 1.

Utiliser la question 2. pour trouver une solution particulière (proportionnelle à h).

- 20** 1. Dériver φ à l'aide de la règle de la chaîne.

On constate que φ est constante pourvu que $Y' - 2tY = 0$.

2. Procéder par analyse-synthèse. Dans l'analyse la question 1 assure que $f(t, Ce^{t^2}) = u_0(t)$ pour tous $t, C \in \mathbb{R}$.

On en déduit une expression de $f(x, y)$ pour tout (x, y) .

Ne pas oublier la phase de synthèse.

Solution : $(x, y) \mapsto u_0(ye^{-x^2})$

- 21** 1. Procéder par composition pour la caractéristique \mathcal{C}^1 .

2. Montrer que G « ne dépend pas de v » i.e. montrer que

$$\frac{\partial G}{\partial v}(u, v) = 0 \text{ pour tous } u, v. \text{ Ceci prouve que pour tout}$$

$u \in \mathbb{R}$, la fonction $v \mapsto G(u, v)$ est une constante $g(u)$ (la

« constante » dépend de u). On « revient » à f en prenant $u = \frac{x}{1+y^2}$ et $v = y$.