Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

1 SF 6 SF 4 SF 5 SF 3 On pose pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et calculer ses dérivées partielles.
2. Montrer que f possède des dérivées partielles en $(0,0)$ mais qu'elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ en ce point.

2 SF 6 SF 4 SF 5 On pose pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et calculer ses dérivées partielles.
2. Montrer que f possède des dérivées partielles en $(0,0)$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3 SF 6 SF 4 SF 5 On pose pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et calculer ses dérivées partielles.
2. Montrer que f possède des dérivées partielles en $(0,0)$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

4 SF 6 SF 4 SF 5 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note U l'ouvert $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$ et on pose, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y-x}\displaystyle\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq y \\ f(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

1. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et calculer ses dérivées partielles.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que g admet des dérivées partielles en (a,a) et les exprimer en fonction de $f'(a)$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(x,y) \in U$. Montrer que :
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a,a) = \frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y (y-t)\big(f'(t)-f'(a)\big)\,\mathrm{d}t$$
4. En déduire que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

5 SF 6 SF 4 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

Montrer que $\varphi : (x,y) \mapsto \displaystyle\int_{x^2}^{xy} f(t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.

6 SF 4 Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$f(x,y) = -1 + e^{x^2+y^2+2x}$$

1. Déterminer une équation du plan tangent à f en $(0,0)$.
2. Décrire géométriquement les lignes de niveau de f.

Règle de la chaîne

7 SF 8 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\varphi : t \mapsto f(2t, 1+t^2)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que $F : (u,v) \mapsto f(u^2+v^2, uv)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer son gradient.

8 SF 8 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

1. Calculer la dérivée de $\psi : x \mapsto f\big(x, f(x,x)\big)$
2. Calculer les dérivées partielles de :
   a) $F : (x,y) \mapsto f(y,x)$ **b)** $G : (x,y) \mapsto f\big(x, f(x,y)\big)$

9 SF 8 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et $L \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que :

$$\forall q,p \in \mathbb{R}^2, \quad \|\nabla f(q) - \nabla f(p)\| \leq L\,\|p-q\|$$

1. a) Soit $p,q \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction
$$\varphi : t \mapsto f\big((1-t)p+tq\big) - \frac{L}{2}t^2\,\|p-q\|^2$$
est concave sur $[0,1]$.
   b) En déduire que pour tous $p,q \in \mathbb{R}^2$:
$$f(q) \leq f(p) + (\nabla f(p) \mid q-p) + \frac{L}{2}\,\|q-p\|^2$$
2. On suppose que f possède un minimum en $p_0 \in \mathbb{R}^2$. Montrer que : $\dfrac{1}{2L}\,\|\nabla f(p)\|^2 \leq f(p) - f(p_0)$ pour tout $p \in \mathbb{R}^2$.

10 SF 4 SF 8 Soit $\star$ une loi de groupe sur $\mathbb{R}$ de neutre e. On suppose que l'application $f : (x,y) \mapsto x \star y$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. a) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x \star y, e) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(y,e)$$
   b) En déduire que : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,e) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. On note Φ la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_e^x \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}(t,e)}\,dt$.
   a) Montrer que Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que pour tous $x,y \in \mathbb{R}$: $\Phi(x \star y) = \Phi(x) + \Phi(y)$

Problèmes d'extremums

11 SF 4 SF 7 Déterminer les extremums locaux de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

a) $f : (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
b) $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + x^3$
c) $f : (x,y) \mapsto \cos x + y^2$

12 SF 4 SF 7 Déterminer les extremums locaux de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

a) $f : (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$
b) $f : (x,y) \mapsto 2y^4 - 3xy^2 + x^2$
c) $f : (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 4xy$

13 SF 8 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

1. Pour tous $p,q \in \mathbb{R}^2$ exprimer la dérivée de la fonction $\varphi : t \mapsto f\big((1-t)p+tq\big)$ en fonction du gradient de f.
2. On suppose :
$$\forall q,p \in \mathbb{R}^2, \quad (\nabla f(q) - \nabla f(p) \mid q-p) \geq 0$$
Montrer que tout point critique de f en est un minimum.

14 SF 8 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. On suppose que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \geq 0$$

1. Soit $a,b \in \mathbb{R}$ tel que $a^2+b^2=1$. Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto f(ta,tb)$ est croissante $[1,+\infty[$
2. Montrer que f possède un minimum sur
$$S = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2+b^2=1\right\}$$
3. En déduire que f possède un minimum sur :
$$F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \geq 1\right\}$$

15 SF 4 SF 7 On pose, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$$f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$$
On pose en outre $K = [0,1]^2$.

1. Justifier l'existence de $M = \sup\limits_{(x,y)\in K} f(x,y)$.
2. Montrer que M n'est atteint en aucun point de l'ouvert $]0,1[^2$.
3. *On admet dans cette question que f possède un maximum sur K.* Montrer que $M=7$.
4. ★★★★ Montrer que f possède un maximum sur K.

Equations aux dérivées partielles

16 SF 8 Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est dite *α-homogène* si pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $t>0$:
$$f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$$

1. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, α-homogène. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont $(\alpha-1)$-homogènes et prouver l'identité d'Euler :
$$(\star) \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$
2. Réciproquement, montrer que si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifie $(\star)$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, alors f est α-homogène. *Indication : Considérer la fonction $t \mapsto f(tx,ty)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé.*

17 SF 4 On considère les ouverts $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

1. Trouver toutes les $f \in \mathscr{C}^1(V,\mathbb{R})$ telles que pour tout $(x,y) \in V$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ telle que pour tout $(x,y) \in U$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$
Indication : Procéder par l'absurde et considérer $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$.

18 SF 8 SF 9 SF 4 SF 6

Trouver toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telles que :
$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x+y \\ \forall t \in \mathbb{R}, & f(0,t) = e^t \end{cases}$$
Indication : Considérer la fonction $F : (u,v) \mapsto f(u, v-2u)$.

19 SF 8 SF 9 SF 4 SF 6 SF 5 SF 2

1. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telles que :
$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \\ & f(0,0) = 0 \end{cases}$$
Indication : Considérer $\varphi : t \mapsto f(tx,ty)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé.
2. Montrer que $h : (x,y) \mapsto \sqrt{x^4+y^4}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$
3. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telles que :
$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^4+y^4} \\ & f(0,0) = 0 \end{cases}$$

20 SF 8 SF 9 SF 4 SF 6 Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. On suppose que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2xy\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$
Soit $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto f\big(t, Y(t)\big)$ est constante si Y est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 à déterminer.
2. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telles que :
$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2xy\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{R}, & f(0,t) = u_0(t) \end{cases}$$

21 SF 8 SF 9 SF 4 SF 6

1. Soit $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note f la fonction $(x,y) \mapsto g\left(\dfrac{x}{1+y^2}\right)$
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2xy\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$
2. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. On suppose réciproquement que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2xy\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$
Montrer qu'il existe $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que pour tous $x,y \in \mathbb{R}$: $\quad f(x,y) = g\left(\dfrac{x}{1+y^2}\right)$.
Indication : Considérer la fonction $G : (u,v) \mapsto f\big((1+v^2)u, v\big)$.