

- 1
- 2 Exploiter notamment la propriété $\det(A^T) = \det(A)$
- 3 1. En notant f l'endomorphisme canoniquement associé à A , il s'agit de montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de \mathbb{K}^n dans laquelle

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & x \\ 0 & 0 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x \end{pmatrix}$$

(où les x désignent des coefficients quelconques).
Prendre une base (b_1, \dots, b_{n-1}) de $\text{Ker } f$, complétée en une base (b_1, \dots, b_n) de \mathbb{K}^n .

- 2. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & b_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix}$ vérifier que $\det(I_n + B) = 1 + \text{tr}(B)$.
L'égalité sur A en découle en utilisant l'exercice 1

- 4 1. Factoriser $A^2 + tI_n = (A + i\sqrt{t}I_n)(A - i\sqrt{t}I_n)$
- 2. a) Posant $B = M + tI_n$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \underbrace{\prod_{j=1}^n b_{\sigma(j),j}}_{=p_\sigma(t)} \quad \text{où } b_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & \text{si } i \neq j \\ m_{i,i} + t & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarquer chaque fonction p_σ est polynomiale et :

 - si $\sigma = \text{Id}$ alors p_σ est de degré n
 - si $\sigma \neq \text{Id}$ alors p_σ est de degré inférieur à $n - 1$
- b) Procéder par l'absurde : si $-I_n = A^2 + B^2$, alors pour tout $t \in [0, 1]$: $-(A + tI_n) = B + (1 - t)I_n$.
Prendre le déterminant de cette égalité et dénicher une contradiction avec les deux questions qui précèdent.

- 5 Deux méthodes sont possibles :
 - Méthode 1 : par linéarité selon les lignes et les colonnes.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} (-1)^{1+1}a_{1,1} & (-1)^{1+2}a_{1,2} & \dots & (-1)^{1+n}a_{1,n} \\ (-1)^{2+1}a_{2,1} & (-1)^{2+2}a_{2,2} & \dots & (-1)^{2+n}a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}a_{n,1} & (-1)^{n+2}a_{n,2} & \dots & (-1)^{n+n}a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Factoriser :

- Toute la première colonne par $(-1)^1$
- Toute la deuxième colonne par $(-1)^2$
- ...
- Toute la dernière colonne par $(-1)^n$

Ce qui donne

$$\det B = (-1)^1 \times (-1)^2 \times \dots \times (-1)^n \begin{vmatrix} (-1)^1 a_{1,1} & (-1)^1 a_{1,2} & \dots & (-1)^1 a_{1,n} \\ (-1)^2 a_{2,1} & (-1)^2 a_{2,2} & \dots & (-1)^2 a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^n a_{n,1} & (-1)^n a_{n,2} & \dots & (-1)^n a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Faire les même factorisations mais cette fois selon les lignes

- Méthode 2 : avec $\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n b_{\sigma(j),j}$.
Remplacer $b_{\sigma(j),j} = (-1)^{\sigma(j)+j} a_{\sigma(j),j} = (-1)^{\sigma(j)} (-1)^j a_{\sigma(j),j}$

Séparer les produits en remarquant qu'après réindexation

$$\prod_{j=1}^n (-1)^{\sigma(j)} = \prod_{k=\sigma(j)}^n (-1)^k$$

on finit par trouver : $\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j} = \det(A)$

- 6 Les colonnes sont liées : chaque colonne est une combinaison linéaire de : $S = \begin{pmatrix} \sin a_1 \\ \vdots \\ \sin a_n \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} \cos a_1 \\ \vdots \\ \cos a_n \end{pmatrix}$.

- 7 Procéder par analyse-synthèse.
 - Analyse. Si A convient en posant $r = \text{rg } A$ on peut écrire $A = UJ_r V$ où $U, V \in GL_n(\mathbb{K})$. En prenant $X = UYV$ dans l'égalité puis en simplifiant par $\det(U)$ et $\det(V)$ constater que J_r doit vérifier $\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(J_r + Y) = \det(Y)$
Prendre alors $Y = I_n$ et calculer les déterminants.
L'égalité obtenue montre que nécessairement $r = 0$ i.e. A est nulle.
 - La synthèse n'est pas difficile.

- 8 Montrer que $\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, f(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n)$ est une forme n -linéaire alternée sur E .
Pat théorème ceci assurera que $\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$ où λ est donné par $\lambda = \varphi(b_1, \dots, b_n)$.
Reste ensuite à montrer que $\varphi(b_1, \dots, b_n) = \text{tr } f$.
Pour cela on peut calculer $\varphi(b_1, \dots, b_n)$ en décomposant chaque $f(b_k)$ dans la base \mathcal{B} i.e. en écrivant

$$f(b_k) = \sum_{i=1}^n a_{i,k} b_i \quad \text{où } A = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$$

Le caractère alterné de $\det_{\mathcal{B}}$ assure que

$$\det_{\mathcal{B}}(b_1, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,k} b_i, \dots, b_n) = \det_{\mathcal{B}}(b_1, \dots, a_{k,k} b_k, \dots, b_n)$$

Avec la n -linéarité du déterminant on obtient

$$\varphi(b_1, \dots, b_n) = \sum_{k=1}^n a_{k,k} \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_k, \dots, b_n)}_{=1} = \text{tr}(A) = \text{tr}(f)$$

- 9 1. Les coefficients de M vérifient $m_{i,j} = \begin{cases} a_{j-i} & \text{si } j \geq i \\ a_{n+j-i} & \text{si } j < i \end{cases}$.
Calculer $(MV)_{i,j}$ à l'aide de la définition en coupant la somme en l'indice $k = i - 1$ puis réindexer les deux sommes obtenues pour les mettre sous la forme $\sum a_\ell \dots$
- 2. Calculer $\det(MV)$ de deux façons :
 - D'une part $\det(MV) = \det(M)\det(V)$
 - D'autre part si on note $V = (C_1|C_2|\dots|C_n)$ (écriture en colonnes) alors $MV = (P(1)C_1|P(\omega)C_2|\dots|P(\omega^{n-1})C_n)$.

- 10 1. $\mathbb{C}_{n-2}[X]$ est de dimension $n - 1$.
- 2. Vérifier qu'il s'agit en fait du déterminant de la famille $(P(X), P(X + 1), \dots, P(X + n - 1))$ dans la base

$\mathcal{B} = (L_1, \dots, L_n)$ de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ formée des polynômes de Lagrange associés aux points $1, \dots, n$.

11 M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$.
On trouve : $\det(M) = -(m+3)(m^2+m+1)$.

12 1. Utiliser $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ pour $t = \tan \frac{\theta}{2}$ puis opérer sur les colonnes.

2. a) Utiliser $\gamma = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)}$ puis une

formule de trigonométrie.

b) En notant $s = \alpha + \beta + \gamma$ et $p = \alpha\beta\gamma$, remarquer que α, β, γ sont les racines de $P(X) = X^3 - sX^2 + X - p$. Ceci assure que les colonnes sont liées dans le déterminant obtenu à la question 1.

13 On se ramène à des déterminants triangulaires par des opérations élémentaires (méthode du pivot).
Réponses à trouver :

a) $D = -ab(a+b)$ b) $D = (c-b)(b-a)(c-a)$

c) $D = (a+b+c)^3$ d) $D = a(a-b)^3$

14 Réponse à trouver : $\Delta = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 2abcV(a, b, c)$.

On peut par exemple commencer par l'opération

$$C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3$$

puis utiliser la première colonne pour simplifier les autres.

15 L'identité $\omega^3 = 1$ assure que les colonnes sont liées : $C_2 = \omega^2 C_1$ et $C_3 = \omega C_1$. Le cours donne la valeur du déterminant sans calcul.

16 On se ramène à un déterminant triangulaire en faisant les opérations $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$, puis $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$, puis ... puis enfin $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$.

17 Deux méthodes (au moins) sont possibles.

• *Méthode 1 : par opérations élémentaires.* Par échanges de colonnes, on se ramène à

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \times \dots \times a_n$$

Attention cependant : chaque échange de colonne multiplie le déterminant par -1 donc il s'agit de compter le nombre d'échange de colonnes. Distinguer les cas n pair et n impair

• *Méthode 2 : par récurrence en développant selon les lignes.* En notant $D(a_1, \dots, a_n)$ le déterminant dont il est question et en développant selon la première ligne, on obtient

$$D(a_1, \dots, a_n) = (-1)^{n+1} a_n D(a_1, \dots, a_{n-1})$$

18 Noter $B = \lambda I_n - M$ puis utiliser la définition du déterminant

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n b_{\sigma(j), j}$$

Les variables $b_{\sigma(j), j}$ sont indépendantes donc

$$E(\det(B)) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n E(b_{\sigma(j), j})$$

Autrement dit : $E(\det(\lambda I_n - M)) = \det(\lambda I_n - E(M))$
où $E(M) = (E(X_{i,j}))_{1 \leq i, j \leq n}$ est une matrice dont tous les coefficients valent m . On est ramené à un déterminant simple.

19 a) Deux méthodes (au moins) sont possibles.

• *Méthode 1 : par récurrence en développant selon les lignes.* En notant D_n le déterminant dont il est question et en développant selon L_2 , on obtient $D_n = -1 + D_{n-1}$

• *Méthode 2 : par opérations élémentaires.* L'opération $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - \dots - C_n$ transforme le déterminant en un déterminant triangulaire supérieur.

b) La somme des coefficients de chaque colonne est identique et vaut $n+x$. La méthode usuelle vue en cours s'applique dans ce cas :

Réponse finale : $x^{n-1}(n+x)$.

20 a) Avec la définition du produit on obtient :

$$(M^2)_{p,q} = \begin{cases} n & \text{si } p=q=1 \text{ ou } p \geq 2 \text{ et } q=n+2-p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{i.e. } M^2 = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & & n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Par échange de colonnes : $|\det(M)| = n^{\frac{n}{2}}$.

b) $\det(M)$ est un déterminant de Vandermonde :

$$\det(M) = \prod_{0 \leq p < q \leq n-1} (\omega^q - \omega^p)$$

En factorisant $\omega^q - \omega^p$ par l'angle moitié on obtient

$$\det(M) = i^{\frac{n(n-1)}{2}} e^{i\frac{\pi}{n}\theta} \times R, \quad \text{où } R \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta = \sum_{0 \leq p < q \leq n-1} p+q.$$

Il reste à calculer la somme.

$$\text{Réponse : } \arg(\det(S)) \equiv \frac{(n-1)(3n-2)}{4} \pi.$$

21 1. M_a est inversible ssi $\det(M_a) \neq 0$.

Il s'agit ainsi de calculer $\det(M_a)$.

Développer selon la première colonne :

$$\det(M_a) = -1 \times \begin{vmatrix} -1 & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ & & & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} a \begin{vmatrix} a & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{vmatrix} a$$

Les deux déterminants obtenus sont triangulaires.

Réponse finale : $\det(M_a) = (-1)^n (1 - a^n)$

Ainsi M_a est inversible ssi $a^n \neq 1$ i.e. ssi $a \notin \mathbb{U}_n$

2. Avec la question 1 :

• si $a \notin \mathbb{U}_n$, M_a est inversible donc de rang n .

• si $a \in \mathbb{U}_n$ i.e. si $a^n = 1$ alors $\text{rg} M_a \leq n-1$.

On peut envisager de montrer que $\text{rg} M_a = n-1$.

Il suffit donc de montrer que $\text{rg} M_a \geq n-1$.

Pour cela constater que la matrice extraite obtenue en enlevant la première ligne et la première colonne est inversible.

22 Il s'agit de déterminants tridiagonaux : suivre la stratégie du savoir-faire **SF 6**

a) Réponse à trouver :

- si $x \neq \pm 1$: $D_n = \frac{1-x^{2(n+1)}}{1-x^2}$.
- si $x = \pm 1$: $D_n = n+1$.

b) Réponse à trouver : $D_n = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$

23 1. Effectuer les opérations $C_j \leftarrow C_j - C_1$ pour $j \geq 2$:

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c-a & \dots & c-a & \\ b+x & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-a \\ b+x & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

Ne pas chercher à calculer le déterminant obtenu. L'intérêt est que x n'apparaît que dans les coefficients de la première colonne.

En développant par rapport à C_1 on obtient

$$f(x) = (a+x)\Delta_{1,1} + \underbrace{\sum_{i=2}^n (b+x)(-1)^{i+1}\Delta_{i,1}}_{\text{de la forme } mx+p} = mx+p$$

pour certaines constantes m et p

2. Avec la 1,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad mx+p = f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c+x & \dots & c+x \\ b+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+x \\ b+x & \dots & b+x & a+x \end{vmatrix}$$

Il suffit de trouver deux valeurs de x pour lesquelles on sait calculer le déterminant pour former un système d'inconnues m et p .

Les valeurs $x = -b$ et $x = -c$ donnent des déterminants triangulaires.

Réponse à trouver :

$$m = \frac{(a-b)^n - (a-c)^n}{c-b} \quad \text{et} \quad p = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}$$

24 On peut (entre autres) procéder par récurrence sur n . Pour l'hérédité, la linéarité par rapport à la dernière colonne permet d'écrire

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+a_{n+1} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{D_1} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 1 & a_{n+1} \end{vmatrix}}_{D_2}$$

- En effectuant $C_j \rightarrow C_j - C_n$ on trouve : $D_1 = a_1 \dots a_n$
- En développant par rapport à C_n :

$$D_2 = a_{n+1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

25 • Faire d'abord les opérations : $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} - L_n$, puis $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1} \dots$, puis enfin $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et simplifier les coefficients en utilisant la formule de Pascal $\binom{n+1}{p} - \binom{n}{p} = \binom{n}{p-1}$

- Développer par rapport à la première colonne.
- Faire ensuite les opérations : $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}$, puis $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_{n-2} \dots$, puis enfin $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ et simplifier les coefficients en utilisant la formule de Pascal $\binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{p} = \binom{n}{p+1}$
- On obtient $D_n = D_{n-1}$.
- On en déduit que $D_n = D_1 = 1$.

26 1. Développer selon la dernière ligne :

$$\Delta_n = (-1) \times a_n \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & -1 \end{vmatrix} + \Delta_{n-1}$$

Développer le premier déterminant selon la dernière colonne pour obtenir la relation demandée.

2. Procéder par récurrence double sur n .
3. • Si $(\Delta)_n$ converge alors la série $\sum a_n$ est majorée et à termes positifs.
• Si $\sum a_n$ converge alors cette série est majorée. Ceci permet de majorer $(\Delta)_n$ en utilisant $1 + a_k \leq e^{a_k}$. La relation de récurrence de la question a) permet de montrer que cette suite est par ailleurs croissante.

27 Procéder par récurrence sur n . Pour l'hérédité, développer par rapport à une ligne

28 Pour l'étape d'hérédité, si x_1, \dots, x_n sont fixés tels que $M = (f_j(x_i))$ est inversible considérer la fonction

$$D : x \mapsto \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_n(x_1) & f_{n+1}(x_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_1(x_n) & \dots & f_n(x_n) & f_{n+1}(x_n) \\ f_1(x) & \dots & f_n(x) & f_{n+1}(x) \end{vmatrix}$$

Il s'agit de montrer que D n'est pas la fonction nulle. On peut par exemple procéder par l'absurde et développer D par rapport à la dernière ligne. On obtient une combinaison linéaire nulle de (f_1, \dots, f_n) dont le coefficient de f_n vaut $\pm \det(M) \neq 0$.

29 L'indication de l'énoncé permet de se ramener à des déterminants triangulaires par blocs

30 Par opérations élémentaires on transforme $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}$ en $\begin{vmatrix} A+B & 0 \\ 0 & A-B \end{vmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$ (déterminant diagonal par bloc). Pour cela, commencer par soustraire le « bloc des n dernières colonnes » au « bloc des n premières colonnes » i.e. effectuer $C_1 \leftarrow C_1 - C_{n+1}, \dots, C_n \leftarrow C_n - C_{2n}$ ce qui donne $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{vmatrix}$ il suffit alors de soustraire le « bloc des n premières lignes » au « bloc des n dernières lignes »

- 31** Utiliser : $(\star) A \times \text{Com}(A)^\top = \det(A)I_n$
- Si A est inversible (\star) permet de trouver B telle que $B \times \text{Com}(A)^\top = I_n$.
 - Si $\text{Com}(A)^\top$ est inversible, raisonner par l'absurde en supposant A non inversible.

- 32** **1. a)** Si $\text{rg}(A) = n - 1$ alors A possède une matrice extraite de taille $(n - 1)$ qui est inversible
- b)** Se rappeler que si $A \times B = 0$ alors $\text{Im } B \subset \text{Ker } A$.
- c)** $\text{rg}(\text{Com}(A)) = \text{rg}(\text{Com}(A)^\top)$ et utiliser b) et a).
- 2.** Si $\text{rg}(A) < n - 1$ alors A ne possède aucune matrice extraite de taille $(n - 1)$ et inversible.

- 33 a)** Prendre le déterminant de l'égalité
- $$(\star) A \times \text{Com}(A)^\top = \det(A)I_n$$
- en utilisant les propriétés du déterminant.
On obtient : $\det(\text{Com}(A)) = \det(A)^{n-1}$.
- b)** On cherche $\text{Com}(M)$ où $M = \text{Com}(A)$. Or
- $$M \times \text{Com}(M)^\top = \det(M)I_n$$
- donc en transposant
- $$\text{Com}(M) \times M^\top = \det(M)I_n$$

- 34** **1.** Utiliser $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}$.
- 2.** Si $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ noter que :
- $\det(A) \in \mathbb{Z}$
 - $\frac{1}{\det A} = \det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$
- Pour la réciproque utiliser $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Com } A^\top$ et justifier que :
- $\frac{1}{\det(A)}$ est entier
 - $\text{Com}(A)$ est à coefficients entiers.

- 35** Ecrire une relation de Bézout entre $\det(A)$ et $\det(B)$ et se rappeler que
- $$\det(A)I_n = A \times \text{Com}(A)^\top \quad \text{et} \quad \det(B)I_n = B \times \text{Com}(B)^\top$$

- 36** En notant C_1, \dots, C_n les colonnes de A et $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ exploiter le caractère n -linéaire du déterminant pour écrire :
- $$\det(tI_n - A) = \det_{\mathcal{B}}(tE_1 - C_1, \dots, tE_n - C_n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} t^k p_k$$
- où : $p_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \det(C_1, \dots, E_{i_1}, \dots, E_{i_k}, \dots, C_n)$.
- Remarquer que $p_1 = \text{tr}(\text{Com } A)$.

- 37** En notant U la colonne des coordonnées de u dans \mathcal{B} , on peut montrer que $\text{Com}(P) = UU^\top$.
Pour cela observer notamment que :
- $\text{Com}(P)$ est symétrique.
 - $\text{Com}(P)$ est de rang 1 et $\text{Im } \text{Com}(P) = \text{Vect } u$.
 - $\text{tr} \text{Com}(P) = 1$

- 38** **1.** Prendre le déterminant de l'égalité.
- 2. a)** Prendre l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ par exemple.
- b)** Prendre l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & \dots \\ & & & A \end{pmatrix}$.

39 φ est une symétrie.

40 Procéder par récurrence forte sur n en écrivant les matrices de u et v dans une base adaptée à $\text{Im } v$.