Propriétés des déterminants

1 SF 4

1. Montrer que deux matrices semblables ont même déterminant et même trace.
2. Trouver deux matrices de taille 2 qui ont même trace et même déterminant mais qui ne sont pas semblables.

2 SF 4 Pour n impair, calculer le déterminant d'une matrice antisymétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3 SF 4 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1. Monter que A est semblable à une matrice B dont les $n-1$ premières colonnes sont nulles.
2. En déduire que $\det(I_n + A) = 1 + \operatorname{tr}(A)$.

4 SF 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que : $\det(A^2 + tI_n) \geq 0$.
2. ★★★
   a) Montrer que la fonction $t \mapsto \det(M + tI_n)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est polynomiale de degré n pour toute $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   b) On suppose n impair. Montrer que $-I_n$ n'est pas somme de deux carrés de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

5 SF 4 Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ b_{i,j} = (-1)^{i+j} a_{i,j}$$

Montrer que $\det(B) = \det(A)$.

6 SF 4 Soit $n \geq 3$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
Calculer le déterminant de la matrice $M = \big(\sin(a_i + a_j)\big)$.

7 SF 4 Trouver toutes les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A + X) = \det(X)$$

8 SF 4 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'une base $\mathscr{B}$ et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que pour tous vecteurs $x_1, \ldots, x_n \in E$:

$$\sum_{k=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_{k-1}, f(x_k), x_{k+1}, \ldots, x_n) = \operatorname{tr}(f) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$$

9 SF 4 Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On pose $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$,

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

1. Montrer : $\forall i, j \in [\![1,n]\!], \quad (MV)_{i,j} = P(\omega^{j-1}) V_{i,j}$
2. En déduire : $\det(M) = \displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$.

10 SF 8 Soit $P \in \mathbb{C}_{n-2}[X]$.

1. Montrer que $\big(P(X), P(X+1), \ldots, P(X+n-1)\big)$ est liée.
2. En déduire la valeur de $\begin{vmatrix} P(1) & P(2) & \cdots & P(n) \\ P(2) & P(3) & \cdots & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & \cdots & P(2n-1) \end{vmatrix}$

Calcul par opérations élémentaires

11 SF 7 Soit $m \in \mathbb{C}$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 2 \\ -1 & m+1 & 3 \\ 2m & 2 & 1-m \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de m la matrice M est-elle inversible ?

12 SF 7 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ tels que : $a + b + c = \pi$.
On pose : $\alpha = \tan\dfrac{a}{2}$, $\beta = \tan\dfrac{b}{2}$ et $\gamma = \tan\dfrac{c}{2}$.

1. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \cos a & \alpha \\ 1 & \cos b & \beta \\ 1 & \cos c & \gamma \end{pmatrix}$.

   Montrer : $\det(M) = \dfrac{2}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)(1+\gamma^2)} \begin{vmatrix} \alpha^2 & 1 & \alpha + \alpha^3 \\ \beta^2 & 1 & \beta + \beta^3 \\ \gamma^2 & 1 & \gamma + \gamma^3 \end{vmatrix}$
2. a) Montrer que : $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 1$.
   b) En déduire que M n'est pas inversible.

13 SF 5 Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Dans chacun des cas suivants, calculer D sous la forme la plus factorisée possible :

a) $D = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & b \\ a & b & 0 \end{vmatrix}$ b) $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix}$

c) $D = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$ d) $D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix}$

14 SF 5 Factoriser le déterminant : $\Delta = \begin{vmatrix} a+b & b+c & a+c \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & a^2+c^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & a^3+c^3 \end{vmatrix}$

15 SF 5 Soit ω une racine cubique de l'unité.

Etablir avec un minimum de calcul : $\begin{vmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ \omega & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0$.

16 SF 5 Soit $n \geq 1$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} k$.

Calculer : $D_n = \begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$.

17 SF 5 Calculer : $D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ pour $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

18 SF 5 Soit $M = (X_{i,j})$ une matrice aléatoire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des variables indépendantes de même loi d'espérance m. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$E\big(\det(\lambda I_n - M)\big) = (\lambda - nm)\lambda^{n-1}$$

19 SF 5 Soit $x \in \mathbb{C}$. Calculer les déterminant de taille n :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+x \end{vmatrix}$

20 SF 5 Soit $n \geq 1$, on pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $M = \left(\omega^{(p-1)(q-1)}\right)_{1 \leq p,q \leq n}$.

a) Calculer M^2 puis $|\det(M)|$
b) Calculer un argument de $\det(M)$

Développement suivant une rangée

21 SF 7 SF 5 Soit $a \in \mathbb{C}$. On considère la matrice $M_a \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:

$$M_a = \begin{pmatrix} -1 & a & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & a \\ a & 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

1. Trouver tous les $a \in \mathbb{C}$ tels que M_a est inversible.
2. Déterminer le rang de M_a selon les valeurs de a

22 SF 6 Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in]0,\pi[$ fixés. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les déterminants de taille n suivants en établissant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

a) $D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & 0 \\ x & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ 0 & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$ **b)** $D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$

23 SF 5 Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$, avec $b \neq c$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose : $f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c+x & \dots & c+x \\ b+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+x \\ b+x & \dots & b+x & a+x \end{vmatrix}$

1. Montrer que f est une fonction affine.
2. En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

24 SF 5 Montrer que pour tous $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{C}$:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 \dots a_n + \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} a_j$$

25 SF 5 Calculer le déterminant de taille $n+1$ suivant :

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n}{n} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n+1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{2n}{n} \end{vmatrix}$$

26 SF 6 Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs ou nuls. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & a_n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_n = \det(A_n)$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$: $\Delta_n = a_n \Delta_{n-2} + \Delta_{n-1}$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$: $1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \Delta_n \leq \prod_{k=1}^{n} (1+a_k)$
3. Montrer que la suite (Δ_n) converge ssi $\sum a_n$ converge.

27 SF 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leq 1$.

Montrer que : $|\det(A)| \leq 1$.

28 SF 5 Soit $n \geq 1$ et $(f_1,\dots,f_n)$ une famille libre de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur n qu'il existe $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ tels que la matrice $M = \big(f_j(x_i)\big)$ soit inversible.

Déterminant par blocs

29 SF 5 Soient $A,B,C,D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $CD = DC$ et que D est inversible. On pose : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Montrer que M est inversible ssi $AD - BC$ est inversible.

Indication : Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}$.

30 SF 5 Soit $A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Démontrer l'égalité : $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$.

Comatrice

31 SF 9 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A est inversible si et seulement si $\mathrm{Com}(A)$ l'est.

32 SF 9 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $r = \mathrm{rg}(A)$.

1. On suppose que $r = n-1$.
   - **a)** Montrer que : $\mathrm{Im}\big(\mathrm{Com}(A)^\top\big) \subset \mathrm{Ker}\, A$
   - **b)** En déduire : $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 1$.
2. Que vaut $\mathrm{Com}(A)$ lorsque $r < n-1$?

33 SF 9 Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

1. Calculer $\det\big(\mathrm{Com}(A)\big)$ en fonction de $\det A$.
2. Montrer que : $\mathrm{Com}\big(\mathrm{Com}(A)\big) = \det(A)^{n-2} A$

34 SF 9 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ (*i.e.* à coefficients entiers)

1. Montrer que $\det(A) \in \mathbb{Z}$.
2. On suppose A inversible. Montrer que $A^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.

35 SF 9 Soient $A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ (*i.e.* à coefficients entiers) telles que $\det(A)$ et $\det(B)$ soient premiers entre eux.
Montrer qu'il existe $U,V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = I_n$.

36 SF 4 SF 9 Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Exprimer le coefficient de degré 1 de $t \mapsto \det(tI_n - A)$ en fonction de $\mathrm{tr}\big(\mathrm{Com}(A)\big)$.

37 SF 4 SF 9 Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathscr{B}$ et $u,v \in E$ deux vecteurs unitaires.
On pose $H_u = \{u\}^\perp$ (resp. $H_v = \{v\}^\perp$) et on note p (resp. q) le projecteur orthogonal sur H_u (resp. H_v).
On pose enfin : $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$ et $Q = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(q)$.
Etablir : $\mathrm{Com}(P)\mathrm{Com}(Q)\mathrm{Com}(P) = (u \mid v)^2\, \mathrm{Com}(P)$.

Déterminant d'un endomorphisme

38 SF 10

1. Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $f^2 = -\mathrm{Id}_E$. Montrer que $\dim E$ est pair.
2. **a)** Trouver un $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ pour lequel $f^2 = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$
   b) Généraliser l'exemple précédent à $\mathbb{R}^{2n}$.

39 SF 10 On note φ l'endomorphisme $M \mapsto M^\top$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer $\det(\varphi)$ en fonction de n.

40 SF 5 SF 10 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u,v \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que v est nilpotent et que u et v commutent. Montrer que : $\det(u+v) = \det(u)$.