

## Calculer des sommes

**1** **SF 1** Justifier la convergence et calculer la somme de la série de terme général  $u_n$  :

a)  $u_n = 2^{3-5n}$     b)  $u_n = \frac{(1+i)^n}{(1+2i)^n}$     c)  $u_n = \frac{\sin n}{2^n}$   
 d)  $u_n = \frac{1}{n^2 - n}$     e)  $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$     f)  $u_n = \frac{6n+4}{n(n^2-1)}$   
 g)  $u_n = \frac{n^2 2^n}{n!}$     h)  $u_n = \frac{n^2 + n - 1}{n!}$

**2** **SF 1** Montrer que la série  $\sum \frac{1}{(n+1)(2n+1)2^{n+1}}$  converge et calculer sa somme.

**3** **SF 6** 1. Déterminer en fonction de  $a, b \in \mathbb{R}$  la nature de

$$\sum (\ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2))$$

2. Calculer la somme lorsqu'il y a convergence.

## Utilisation des critères de comparaison

**4** **SF 2 SF 4** Etudier la nature des séries de terme général  $u_n$  :

a)  $u_n = \frac{n^5 + \ln n}{n^7 + 1}$     b)  $u_n = \sin(2^{-n})$   
 c)  $u_n = \frac{\text{Arctan}(n^5)}{n^2}$     d)  $u_n = \ln\left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n + 2}\right)$   
 e)  $u_n = n^{\frac{1}{n}}$     f)  $u_n = \frac{1}{nn^{1/n}}$   
 g)  $u_n = \left(\frac{n}{1+n}\right)^{\sqrt{n}}$     h)  $u_n = \frac{\text{ch } n}{\text{ch } 2n}$   
 i)  $u_n = \sin n$     j)  $u_n = \frac{1}{\ln n}$   
 k)  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n} \cos^2 n}$     l)  $u_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$

**5** **SF 2 SF 4** Etudier la nature des séries de terme général  $u_n$  :

a)  $u_n = \frac{1 + (-1)^n n}{n^2}$     b)  $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^2}$   
 c)  $u_n = \frac{\cos n - \sin n}{n^2}$     d)  $u_n = 1 + \frac{3}{n^2}$   
 e)  $u_n = \sqrt{n + \frac{1}{2}} - \sqrt{n}$     f)  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^2} - 1$

**6** **SF 2 SF 4 SF 5** Etudier la nature des séries :

a)  $\sum n^3 e^{-n}$     b)  $\sum \frac{\ln n}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$   
 c)  $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$     d)  $\sum \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^3}$   
 e)  $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$     f)  $\sum \left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)^{\sqrt{n}}$     g)  $\sum e^{-\sqrt{\ln n}}$

**7** **SF 2 SF 4** Etudier la nature des séries de terme général  $u_n$  :

a)  $u_n = 2 \ln(n^3 + 3) - 3 \ln(n^2 + 2)$   
 b)  $u_n = \frac{n!}{n^n}$     c)  $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$   
 d)  $u_n = \sin\left(\text{sh} \frac{1}{n}\right) - \text{sh}\left(\sin \frac{1}{n}\right)$     e)  $u_n = \int_n^{2n} \frac{dt}{1+t^{\frac{3}{2}}}$

**8** **SF 4 SF 6** Déterminer en fonction de  $\alpha > 0$  la nature de :

a)  $\sum \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \alpha \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$     b)  $\sum \cos\left(\text{Arctan } n + \frac{1}{n^\alpha}\right)$

**9** **SF 4** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ .

1. Etablir :  $R_n \sim \frac{1}{(n+1)!}$ .
2. En déduire que la série  $\sum \sin(2\pi en!)$  est divergente.

## Utilisation d'une série auxiliaire

**10** **SF 4** 1. Déterminer la nature de :  $\sum \sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n)$ .

2. a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$  est un entier pair.  
 b) En déduire la nature de :  $\sum \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$ .

**11** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$u_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad v_n = u_{2n-1} + u_{2n}$$

1. Déterminer la nature de  $\sum u_n$  lorsque  $\alpha \leq 0$  ou  $\alpha > 1$ .
2. On suppose que  $\alpha \in ]0, 1[$ .  
 a) Montrer que  $\sum v_n$  converge.  
 b) En déduire que  $\sum u_n$  converge.

## Des DL pour « découper » une série alternée

**12** **SF 2 SF 6** Etudier la convergence absolue et la convergence des séries de terme général  $u_n$  :

a)  $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$     b)  $u_n = (-1)^n \sqrt{n} \tan\left(\frac{1}{n}\right)$   
 c)  $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + \cos n}$     d)  $u_n = \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$   
 e)  $u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$

**13** **SF 6** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ . Etudier la convergence absolue et la convergence de : a)  $\sum (-1)^n \sqrt{n} \text{sh}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$     b)  $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$

**14** **SF 3 SF 4 SF 6** 1. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  fixé. Etudier la nature de :

a)  $\sum \frac{1}{(\ln n)^p}$     b)  $\sum \frac{(-1)^n}{(\ln n)^p}$

2. Etudier la convergence absolue et la convergence de la série :  $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n) + (-1)^n}$

## Autour du lien suite-série

**15** **SF 6** L'objectif est d'établir la formule de Stirling.

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $\sigma_n = \ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n$ .  
 a) Montrer que la suite  $(\sigma_n)_{n \geq 1}$  est convergente.  
 b) En déduire l'existence d'une constante  $C$  telle que

$$n! \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} C \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

2. Montrer que  $C = \sqrt{2\pi}$ . On pourra utiliser l'équivalent  $W_{2n} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$ .

**16** **SF 4** Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  strictement positive telle que la série  $\sum u_n$  diverge. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

1. Montrer que  $\sum \ln \frac{S_{n-1}}{S_n}$  diverge.
2. En déduire que  $\sum \frac{u_n}{S_n}$  diverge.

**17** **SF 4** **SF 6** Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . On pose :  $u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Prouver que :  $\ln u_{n+1} - \ln u_n = -\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  pour un certain  $\alpha > 0$  à déterminer en fonction de  $x$ .
2. Montrer que  $\sum \ln u_{n+1} - \ln u_n + \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  converge
3. En déduire que :  $u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$  pour une constante  $C > 0$ , puis déterminer en fonction de  $x$  la nature de  $\sum u_n$ .

### ■ Théorème des séries alternées

**18** **SF 3** Pour tout entier naturel  $n$  on pose :  $I_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t} dt$

1. Justifier que  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie.
2. Etablir :  $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin t}{k\pi + t} dt$
3. En déduire que la suite  $(I_n)$  converge et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \geq 0$ .

**19** **SF 3** **SF 4** **SF 6** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

1. Montrer que  $R_n + R_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
2. Déterminer un équivalent de  $R_n$ .

**20** **SF 3** **SF 4** **SF 6** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sqrt{k}$ .

1. Montrer que  $(b_n + b_{n+1})$  converge vers une limite  $\ell < 0$ .
2. Etudier la nature de la série  $\sum \frac{1}{b_n}$ .

**21** **SF 3** Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ , décroissante, vérifiant  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .  
Pour tout  $x > 0$ , on pose  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(nx)$ .

Montrer que  $g$  est bien définie et que  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{f(0)}{2}$ .

### ■ Comparaison série intégrale

**22** **SF 7** Pour tout  $\alpha > 1$ , on pose  $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ .  
Montrer que :  $\zeta(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1}$ .

**23** **SF 7** Montrer que :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2a}$ .

**24** **SF 8** Soit  $\alpha > 1$  et  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  strictement positive telle que la série  $\sum u_n$  diverge. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .  
Montrer que la série  $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$  converge.

**25** **SF 8** **SF 10** Montrer que la série  $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$  converge puis que :  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \sim \frac{1}{\ln n}$ .

**26** **SF 10** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ .  
Trouver un équivalent de  $R_n$ .

**27** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose qu'il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\int_0^n |f'(t)| dt \leq M$ .

1. Montrer que la série  $\sum \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t) dt$  converge
2. En déduire que la série  $\sum f(n)$  converge si et seulement si la suite  $\left(\int_0^n f(t) dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

### ■ Plus abstraits

**28** **SF 4** cf. Ex. 39, banque INP On note  $E$  l'ensemble des suites  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  pour lesquelles la série  $\sum u_n^2$  converge.

1. Montrer que pour tous réels  $a$  et  $b$  :  $2|ab| \leq a^2 + b^2$ .
2. Soit  $u, v \in E$ . Montrer que la série  $\sum u_n v_n$  converge.
3. En déduire que  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'ensemble  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  des suites réelles.

**29** **SF 4** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , strictement positive telle que  $\sum u_n$  converge. Montrer que les séries  $\sum u_n^2$  et  $\sum \frac{u_n}{1-u_n}$  convergent.

**30** **SF 6** Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\sum u_n$  et  $\sum u_n^2$  convergent. Montrer que la série  $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$  converge.

**31** **SF 4** Ex. 6, banque INP. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  strictement positive telle que :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell < 1$

1. a) Démontrer qu'il existe  $q \in ]0, 1[$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tels que :  $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \leq qu_n$   
b) En déduire :  $\forall n \geq n_0, u_n \leq q^{n-n_0} u_{n_0}$ .  
c) En déduire que la série de terme général  $u_n$  converge.
2. Application. Quelle est la nature de la série  $\sum \frac{n!}{n^n}$  ?

**32** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , décroissante, telle que  $\sum u_n$  converge.

1. a) Etudier  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$  b) En déduire :  $nu_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
2. En déduire que  $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

**33** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , positives. On suppose que la série  $\sum v_n$  converge et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} \leq u_n + v_n$ . Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

**34** **SF 4** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  strictement positive. On suppose qu'il existe  $\alpha > 1$  tel que :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .  
Montrer que la série  $\sum u_n$  converge. Indication : montrer que pour tout  $\beta < \alpha$ , la suite  $(n^\beta u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroît à partir d'un certain rang.

**35** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , strictement positive, croissante et tendant vers  $+\infty$ . Soit  $(v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telle que la série  $\sum \frac{v_n}{u_n}$  converge. Montrer que :  $\frac{1}{u_n} \sum_{k=0}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .