

■ Objectif :

- Continuer à s'exercer sur le lien entre matrices et applications linéaires.

■ L'exercice

2 12 points Soient E un \mathbb{K} -e.v. de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^2 = f^3$ et que $\text{rg}(f - \text{Id}_E) = 2$.

1. a) Montrer que $\text{rg}(f) \in \{1, 2\}$

b) Montrer que $\text{Ker } f \cap \text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \{0\}$

2. On suppose que $\text{rg}(f) = 1$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On suppose que $\text{rg}(f) = 2$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.