

1 Sommabilité d'une famille de complexes

- **Cadre.** • $(u_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres complexes

Définition 1

On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est *sommable* lorsque :

On note $\ell_1(I)$ l'ensemble des familles sommables de $\mathbb{C}^I$

- **Cas des séries.** Pour $I = \mathbb{N}$: Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est sommable ssi

Remarques:

- Toute sous-famille d'une famille sommable est encore sommable.
- Si $(v_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de $[0, +\infty]$ telle que $|u_i| \leq v_i$ pour tout $i \in I$, alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.

SF 1 : vérifier si une famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable

Il suffit de : i) Calculer $\sum_{i \in I} |u_i|$ dans $[0, +\infty]$ (où « tout est permis ») ii) Vérifier si le résultat est fini.

Exemple 1 **SF 1** **SF 3** — Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Les familles ci-dessous sont-elles sommables ?

a) $\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)_{n \geq 1}$

b) $\left(\frac{\sin(p+q)}{p^2 q^2}\right)_{p, q \geq 1}$

c) $(z^{ij})_{i, j \geq 1}$

d) $\left(\frac{1}{n^2 - p^2}\right)_{\substack{n, p \geq 1 \\ n \neq p}}$

2 Somme d'une famille sommable de complexes

- **Cadre.** • $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de nombres complexes • On souhaite définir la somme $\sum_{i \in I} u_i$

Cas d'une famille de réels.

Cas d'une famille de complexes.

Exercice 1 — Justifier dans chacun des deux cas que le nombre $\sum_{i \in I} u_i$ est bien défini.

3 Propriétés des familles sommables

- **Cadre.** • $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ sont des familles sommables de nombres complexes • λ, μ sont des complexes.

Théorème 1 : Opérations

- **Linéarité.** La famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i \in I}$ est sommable et :
- **Inégalité triangulaire.**
- **Invariance par permutation.** $(u_{\sigma(i)})_{i \in I}$ est sommable pour toute permutation σ de I et :

Exercice 2 — Démontrer le théorème.

- **Conséquence.** $\ell_1(I)$ est :

Théorème 2 : Sommation par paquets (admis)

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I . La famille $\left(\sum_{i \in I_k} u_i\right)_{k \in K}$ est sommable et :

SF 2 : Justifier la sommabilité ET calculer la somme d'une famille de complexes

Exemple 2 **SF 2** — Justifier l'existence et calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}$

Théorème 3 : Approximation par des sommes finies

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de I telle que :

Exercice 3 — Démontrer le théorème dans le cas où $(u_i)_{i \in I}$ est une famille de réels.