

| Lois usuelles                             |                              |                                                                                       |                 |                    |
|-------------------------------------------|------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|--------------------|
| Nom                                       | $X(\Omega)$                  | Loi de $X$                                                                            | $E(X)$          | $V(X)$             |
| $\mathcal{B}(p)$                          | $\{0, 1\}$                   | $P(X = 1) = p$                                                                        | $p$             | $p(1 - p)$         |
| $\mathcal{B}(n, p)$                       | $\llbracket 0, n \rrbracket$ | $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ | $np$            | $np(1 - p)$        |
| $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ | $\llbracket 1, n \rrbracket$ | $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = k) = \frac{1}{n}$                    | $\frac{n+1}{2}$ | $\frac{n^2-1}{12}$ |

### SF 1 Déterminer la loi d'une variable aléatoire $X$

- Option 1 : avec la distribution de probabilité de  $X$** 
  - On donne l'ensemble des valeurs prises par  $X$ .
  - On calcule  $P(X = k)$  pour toute valeur  $k$  prise par  $X$ .
- Option 1 bis : Variante lorsque  $X$  est définie comme un min ou un max**
  - On donne l'ensemble des valeurs prises par  $X$ .
  - On calcule les probabilités  $P(X \leq k)$  (pour un max) ou  $P(X \geq k)$  (pour un min)
  - On utilise :  $P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1)$  ou  $P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1)$
- Option 2 : on reconnaît une loi usuelle** : on justifie de quelle loi il s'agit (binomiale, de Bernoulli, ou uniforme) et on donne les paramètres correspondants.

### SF 2 Calculer l'espérance d'une variable $X$ réelle ou complexe

- Option 1 : avec la définition  $X$** 
  - $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$  ou encore  $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$  si  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$
- Option 2 : avec les propriétés de l'espérance**
  - Linéarité** :  $E(aX_1 + bX_2)$  et en particulier :  $E(aX_1 + b) = aE(X_1) + b$
  - Lorsque  $X = X_1 X_2$  avec  $X_1$  et  $X_2$  indépendantes  $E(X) = E(X_1)E(X_2)$ .
  - Sans l'indépendance :  $E(X_1 X_2) = \sum_{i \in X_1(\Omega)} \sum_{j \in X_2(\Omega)} ij P(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\})$ .
- Option 3 : avec la formule de transfert**. Lorsque  $X = f(Y)$  où la loi de  $Y$  est connue, la formule de transfert donne  $E(X) = E(f(Y)) = \sum_{k \in Y(\Omega)} f(k)P(Y = k)$
- Option 4 : avec une loi usuelle**. Dans ce cas  $E(X)$  est connue sans calcul.
- Option 5 : avec des d'indicateurs**. Si  $X$  compte le nombre d'événements  $A_i$  réalisés pour  $1 \leq i \leq n$  on peut écrire  $X = \mathbb{1}_{A_1} + \dots + \mathbb{1}_{A_n}$  et calculer  $E(X)$  par linéarité.

### SF 3 Calculer la variance d'une variable aléatoire réelle $X$

- Option 1 : avec Koenig-Huygens et la formule de Transfert**
  - La formule de Koenig-Huygens donne :  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ .
  - On peut utiliser la formule de transfert pour calculer  $E(X^2)$
- Option 2 : avec les propriétés de la variance**
  - Lorsque  $X = aY + b$  on peut utiliser  $V(X) = a^2 V(Y)$ .
  - Lorsque  $X = X_1 + X_2$  avec  $X_1$  et  $X_2$  indépendantes  $V(X) = V(X_1) + V(X_2)$ .
  - Sans l'indépendance :  $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2 \text{cov}(X_1, X_2)$ .
- Option 3 : avec une loi usuelle**. Dans ce cas  $V(X)$  est connue sans calcul.

### SF 4 Déterminer la loi conditionnelle de $Y$ sachant $\{X = i\}$

Il suffit de calculer les  $P_{\{X=i\}}(Y = j)$  pour tous les  $j \in Y(\Omega)$ .

### SF 5 Déterminer la loi de $Z = X + Y$

- Avec les probabilités totales :  $P(Z = k) = \sum_{i \in X(\Omega)} P_{\{X=i\}}(Y = k - i)P(X = i)$
- Reste à calculer les probabilités  $P_{\{X=i\}}(Y = k - i)$  :
  - Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes :  $P_{\{X=i\}}(Y = k - i) = P(Y = k - i)$ .
  - Sinon on calcule la probabilité de  $\{Y = k - i\}$  sachant  $\{X = i\}$ .

### SF 6 Déterminer la loi conjointe de $X$ et $Y$ :

i) On trouve  $X(\Omega)$  et  $Y(\Omega)$  ii) On calcule les  $P(\{X = i\} \cap \{Y = j\})$  pour  $i \in X(\Omega), j \in Y(\Omega)$

### SF 7 Déterminer les lois marginales à partir de la loi conjointe

- Pour la loi de  $X$  :  $P(X = i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} P(\{X = i\} \cap \{Y = j\})$ , pour tout  $i \in X(\Omega)$ .
- Pour la loi de  $Y$  :  $P(Y = j) = \sum_{i \in X(\Omega)} P(\{X = i\} \cap \{Y = j\})$  pour tout  $j \in Y(\Omega)$ .

### SF 8 Déterminer la loi de $Z = \max(X, Y)$ ou de $Z = \min(X, Y)$

Il peut être utile d'utiliser l'option 1 bis ci-dessus avec :

- Si  $Z = \max(X, Y)$  :  $\{Z \leq k\} = \{X \leq k\} \cap \{Y \leq k\}$
- Si  $Z = \min(X, Y)$  :  $\{Z \geq k\} = \{X \geq k\} \cap \{Y \geq k\}$

### SF 9 Calculer la covariance d'un couple $(X, Y)$

- Option 1** : On utilise :  $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- Option 2** : si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes :  $\text{cov}(X, Y) = 0$ .
- Option 3 : avec les variances (polarisation)**  $\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{2}(V(X + Y) - V(X) - V(Y))$ .

### SF 10 Montrer que $X$ et $Y$ sont indépendantes

On vérifie que pour tous  $i \in X(\Omega)$  et  $j \in Y(\Omega)$  :  $P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = P(X = i)P(Y = j)$

### SF 11 Montrer que $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes

- Option 1** : On trouve un  $i$  et un  $j$  tels que  $P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) \neq P(X = i)P(Y = j)$ .
- Option 2** : On montre que  $\text{cov}(X, Y) \neq 0$ .

### SF 12 Majorer $E(X)$

i) On majore « l'intérieur » :  $X \leq \dots$  ii) Par croissance de l'espérance  $E(X) \leq E(\dots)$

### SF 13 Appliquer astucieusement l'inégalité de Markov

Pour établir  $P(X \geq a) \leq \frac{M}{\alpha}$  on transforme  $\{X \geq a\}$  en  $\{f(X) \geq \alpha\}$  où  $E(f(X)) = M$

### SF 14 Quand appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Elle permet de montrer une inégalité de la forme :  $P(|\dots| \geq \varepsilon) \leq \frac{\dots}{\varepsilon^2}$