

SF 1 Montrer que $\sum u_n$ converge ET déterminer sa somme

- **Option 1** On fait apparaître un télescopage.
- **Option 2** On fait apparaître une somme géométrique ou une série exponentielle.
- **Option 3** On fait apparaître une intégrale.

SF 2 Lignes directrices pour étudier la nature de $\sum u_n$

1. On vérifie que $\lim u_n = 0$ (sinon il y a divergence grossière).
2. Si u_n est de signe constant :
 - On peut utiliser les critères de comparaisons pour comparer u_n au terme général d'une série de référence.
 - On peut utiliser une comparaison série-intégrale.
3. Si u_n n'est pas de signe constant :
 - on peut reconnaître une série alternée.
 - on peut se ramener au cas positif en étudiant la convergence absolue.
4. En cas de non convergence absolue ou si u_n est « compliqué » : on utilise les DL.

SF 3 Etudier la nature d'une série alternée $\sum (-1)^n a_n$

La convergence de $\sum (-1)^n a_n$ est assurée si : • $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ • (a_n) est décroissante.
 Dans ce cas, le théorème des séries alternées fournit aussi une estimation de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: • $|R_n| \leq a_{n+1}$ • R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$.

SF 4 Etudier la nature de $\sum u_n$ à l'aide des critères de comparaisons

- On compare u_n au terme général d'une série de référence :
- **Pour une série à termes positifs** : en cherchant un équivalent de u_n .
 - **Pour une série à termes positifs** : en majorant ou en minorant u_n .
 - **Pour une série quelconque** : En cherchant $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

SF 5 Nature de $\sum u_n$ lorsque u_n a un exposant qui dépend de n

- On revient à l'exponentielle : $u_n = e^{v_n}$.
- Si $\lim v_n \neq -\infty$: il y a divergence grossière.
- Si $\lim v_n = -\infty$, on peut essayer de montrer que $n^2 u_n \rightarrow 0$:
 - On revient à l'exponentielle : $n^2 u_n = e^{2 \ln n + v_n}$.
 - Montrer que $n^2 u_n \rightarrow 0$ revient à montrer que $2 \ln n + v_n \rightarrow -\infty$.

SF 6 Utiliser les DL pour prouver la convergence de $\sum u_n$

On découpe u_n en morceaux plus simples à étudier :

- Typiquement des termes du types $\frac{(-1)^n}{n^\beta}$ avec $\beta > 0$ (séries alternées).
- On choisit l'ordre de façon à obtenir un $O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$ (en général a)

a. Précisément, l'ordre dépend de ce que le dernier terme est de signe constant ou alterné :

- Si : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \dots + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{v_n} + O\left(\underbrace{\frac{1}{n^\beta}}_{w_n}\right)$ où $\alpha > 0$ et $\beta > 1$ alors $\begin{cases} \sum v_n \text{ converge} & (\text{th. des séries alternées}) \\ \sum w_n \text{ converge} & (\text{domination}) \end{cases}$
- Si : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \dots + \underbrace{\frac{1}{n^\alpha}}_{v_n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ où $0 < \alpha < \beta$ alors $v_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$ et $\sum v_n$ est de même nature que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$

SF 7 Effectuer une comparaison série-intégrale

La technique s'applique pour étudier la série $\sum f(k)$ où $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ décroît :

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut écrire : $\forall t \in [k, k+1], f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$.
2. Par croissance de l'intégrale pour tout $k \in \mathbb{N}$: $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$
3. La sommation de ces inégalités permet ainsi de majorer ou minorer $\sum_{k=0}^n f(k)$.

SF 8 Montrer que $\sum f(k)$ converge par comparaison série-intégrale

1. On somme (2) pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ puis on ajoute $f(0)$: $\sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t) dt$
2. On calcule $\int_0^n f(t) dt$ et on la majore par une constante
3. La série à termes positifs est majorée donc convergente.

SF 9 Montrer que $\sum f(k)$ diverge par comparaison série-intégrale

1. On somme (1) pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$: $\sum_{k=0}^n f(k) \geq \int_0^{n+1} f(t) dt$
2. On calcule $I_n = \int_0^n f(t) dt$ et on montre que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
3. La suite (S_n) des sommes partielles diverge par le théorème de minoration (relatif aux suites)

SF 10 Pour obtenir un encadrement de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$

1. On fixe $N \geq n+1$ et on somme (2) pour $k \in \llbracket n, N-1 \rrbracket$ et (1) pour $k \in \llbracket n+1, N \rrbracket$
2. On effectue un passage aux limites dans l'encadrement lorsque $N \rightarrow +\infty$.