

III Projection orthogonale sur un sous-espace

Espaces Préhilbertiens

- **Cadre.** • E est un espace préhilbertien • F est un sous-e.v. de dimension finie de E . • On sait que $F \oplus F^\perp = E$.

1 Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales

Définition 1

- Le *projecteur orthogonal* sur F , noté p_F est le projecteur :
- La *symétrie orthogonale par rapport à F* , notée s_F , est la symétrie :

- **A retenir.** Le projeté de $x \in E$ est l'unique vecteur de E tel que :

$$p_F(x) \in F \quad \text{et} \quad x - p_F(x) \in F^\perp \quad (\text{cf. figure})$$

SF 9 : calculer le projeté – méthode 1 : à vue

- ♥ **Exercice 1** — Calculer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur le sous-e.v. F des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Théorème 1 : Projeté en base orthonormée

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une b.o.n. de F . Pour tout $x \in E$:

- Exercice 2** — Démontrer la formule ci-dessus.

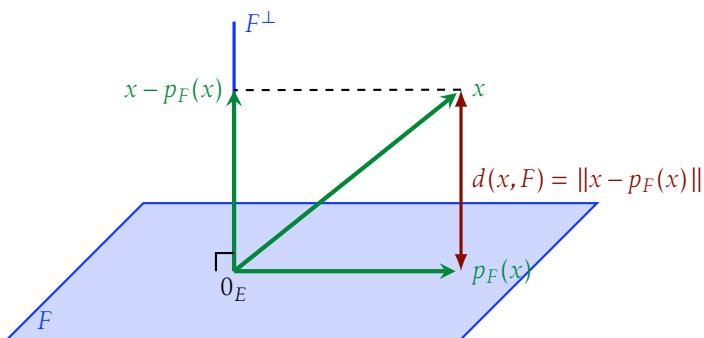
SF 9 : calculer le projeté – méthode 3 : en b.o.n.

- ♥ **Exemple 1** — Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien canonique, on pose : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } z + t = 0\}$. Déterminer la matrice de p_F dans la base canonique.

SF 9 : calculer le projeté – méthode 2 : avec une base quelconque

- ♥ **Exemple 2** — Calculer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire $(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

2 Distance à un sous-espace



Définition 2

Pour $x \in E$, la *distance* de x à F est $d(x, F) \stackrel{\text{déf.}}{=}$

Théorème 2 : Théorème d'approximation

Soit $x \in E$ et $y \in F$. Si $y \neq p_F(x)$:

En particulier :

- **Interprétation.** $p_F(x)$ est le vecteur de F le plus proche de x

- Exercice 3** ♥ — Démontrer le théorème 2 i.e. montrer que pour $y \in F$ tel que $y \neq p_F(x)$: $\|x - y\| > \|x - p_F(x)\|$

- Exercice 4** ♥ *Application en analyse* — Quels sont les réels a, b qui minimisent $I(a, b) = \int_0^1 (t^2 - (at + b))^2 dt$?

3 Cas des hyperplans

- **Cadre.** • E est euclidien de dimension n . • H est un *hyperplan* de E i.e. un sous-e.v. de dimension $n - 1$.
- **Vocabulaire.** On appelle *vecteur normal* à H tout vecteur non nul de $H^\perp$ ($H^\perp$ est une droite vectorielle)

Théorème 3

Soit $x \in E$.

Soit a est un vecteur normal à H :

- Exercice 5** — Démontrer ces deux formules.

- Exemple 3** SF 12 — Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$ et $\vec{u} = (2, 2, 1)$. Calculer $d(\vec{u}, P)$

- Exemple 4** SF 12 — Dans $\mathbb{R}_n[X]$ muni de $(P \mid Q) = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$, on pose $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^n P(k) = 0 \right\}$. Calculer $d(X^n, H)$