

Toutes les définitions / énoncés du cours sont à connaître précisément.

■ Exercice de cours sur 8 points

L'un des exercices de la liste fournie.

INTEGRATION

1 Définition de l'intégrale

- **Cadre.** • $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ avec $a < b$ • $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Une *subdivision* de $[a, b]$ est une famille $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Définition

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est *en escalier* s'il existe une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ (dite *adaptée à f*) telle que f est constante $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Définition

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ en escalier et $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision adaptée à f . Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on note y_i la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$.

L'*intégrale* de f sur $[a, b]$ est le scalaire $\int_{[a,b]} f \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) y_i$.

- **Remarque.** Le scalaire $S(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) y_i$ ne dépend pas de la subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ adaptée à f

Théorème : Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ en escalier et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

1. **Linéarité.** $\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$.
2. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
 - **Positivité.** Si $f \geq 0$: $\int_{[a,b]} f \geq 0$.
 - **Croissance.** Si $f \leq g$: $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.
3. **Relation de Chasles.** Pour tout $c \in]a, b[$: $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$
4. **Fonctions « presque » égales.**
Si f et g sont égales sauf en un nombre fini de points : $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$
5. **Lien avec les parties réelles et imaginaires.** $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \operatorname{Re}(f) + i \int_{[a,b]} \operatorname{Im}(f)$

1.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ (dite *adaptée à f*) telle que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

- f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$.
- $\lim_{x_i^+} f$ et $\lim_{x_{i+1}^-} f$ existent et sont finies.

- **Remarque.** Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée
- **Admis temporairement.** Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$. Il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a, b]$ telle que $\|f - \varphi_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Définition

On définit l'*intégrale* de f sur $[a, b]$ par : $\int_{[a,b]} f \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n$ ceci pour n'importe quelle suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a, b]$ telle que $\|f - \varphi_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- **Conséquence.** Les propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier s'étendent à l'intégrale des fonctions continues par morceaux
- **Notation définitive** $\int_\alpha^\beta f(t) dt$. Pour $\alpha, \beta \in [a, b]$ (ne vérifiant pas forcément $\alpha \leq \beta$)

2 Propriétés de l'intégrale

2.1 Justifier que $\int_a^b f$ est bien définie

Il s'agit de justifier que f est continue (par morceaux) sur $[a, b]$.

2.2 Majorer/minorer des intégrales

- **Cadre.**
 - f et g sont continues par morceaux sur un intervalle $[a, b]$.
 - Les réels a et b sont tels que $a \leq b$
- **But.** Exploiter les propriétés de :
 - *Positivité de l'intégrale* : Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f \geq 0$.
 - *Croissance de l'intégrale* : Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

En pratique : pour majorer/minorer $\int_a^b f(t) dt$

- On encadre « l'intérieur » i.e. on cherche un encadrement de la forme : $\forall t \in [a, b], g(t) \leq f(t) \leq h(t)$.
- La croissance de l'intégrale permet d'écrire $\int_a^b g \leq \int_a^b f \leq \int_a^b h$.

Théorème : Inégalité triangulaire

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux. $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

2.3 Dédire des informations sur f d'une hypothèse sur $\int_a^b f$

Théorème

On suppose que $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Si : i) f est continue sur $[a, b]$ ii) f est positive sur $[a, b]$ iii) $\int_a^b f = 0$.
Alors f est nulle sur $[a, b]$.

- **Conséquence.** Si $f \geq 0$ et si f est continue et n'est pas la fonction nulle : $\int_a^b f > 0$.
- **Remarque.** Cas d'une fonction continue par morceau positive et strictement positive en au moins un point de continuité.

2.4 Calcul de limites d'intégrales (sur des exemples)

3 Intégrales et primitives

- **Cadre.** • I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

3.1 Le théorème fondamental de l'analyse

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, continue et soit $a \in I$.

1. La fonction $\varphi : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur I et $\varphi' = f$.
2. φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

- **Conséquences (rappels).** Toute fonction continue sur I possède des primitives ; on peut calculer une intégrale au moyen d'une primitive ; intégration par parties ; changement de variable.

3.2 Etude d'une fonction définie par une intégrale

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et soient u, v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle J et à valeurs dans I .

La fonction $\varphi : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J, \quad \varphi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

L'adresse de la page des maths est : <https://mathieucathala.fr>