

1 Loi uniforme

Définition 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et on note $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ si :

-
-

L'espérance et la variance de X sont alors données par :

- **Généralisation.** Soit E un ensemble fini. On dit que X suit la loi uniforme sur E si P_X est la probabilité uniforme sur E i.e. :
 - X est à valeurs dans E
 - $\forall A \in \mathcal{P}(E),$

Situation modèle : la loi de l'équiprobabilité

- On tire *au hasard* une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n .
- On note X le numéro de la boule tirée, alors $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Exercice 1 — Démontrer la formule donnant $E(X)$, et calculer $V(X)$.

Exemple 1 — Un gardien possède n clés et doit ouvrir une porte dans le noir. On suppose qu'il n'utilise jamais deux fois la même clé. Combien en moyenne doit-il essayer de clés?

Exemple 2 — Soit X_n de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continue. Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left(f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right)$.

Exemple 3 — Soit $n \geq 2$ et Z de loi uniforme sur $\mathbb{U}_n$. Calculer : $E(Z)$ et $E(\arg Z)$.

2 Loi de Bernoulli

Définition 2

Soit $p \in [0, 1]$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$ si :

-
-

L'espérance et la variance de X sont alors données par :

Situation modèle : l'indicateur de succès

On considère une expérience aléatoire à deux issues possibles : succès avec probabilité p et échec avec probabilité $1 - p$. Si X est la variable aléatoire valant 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.

- **Exemple typique.** On lance une pièce truquée donnant Pile avec probabilité p .

On note X la variable aléatoire valant 1 si l'on obtient Pile et 0 si l'on obtient Face. Alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Exercice 2 — Démontrer les formules sur l'espérance et la variance.

Définition 3

Soit $(\Omega, \mathcal{P})$ un espace probabilisé et $A \subset \Omega$. L'indicatrice de l'événement A est la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$

-
-

Exemple 4 — On lance n fois une pièce. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note A_i l'événement « Le i^{e} lancer vaut 6 ». Que représente la variable $S_n = \mathbb{1}_{A_1} + \dots + \mathbb{1}_{A_n}$?

Exemple 5 — Soit σ une v.a. de loi uniforme sur l'ensemble S_n des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

a) On note A_i l'événement $\{\sigma(i) = i\}$. Calculer $P(A_i)$. **b)** On note F le nombre de points fixes de σ . Calculer $E(F)$

Exemple 6 **SF 12** — On suppose que $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer : $\forall m \in \llbracket 1, n \rrbracket, E(X) \leq m - 1 + nP(X \geq m)$.

3 Loi binomiale

Définition 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) , noté $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, si

-
-

L'espérance et la variance de X sont alors données par :

Situation modèle : le compteur de succès

- On effectue n répétitions indépendantes d'une expérience de Bernoulli (i.e. deux issues possibles : succès avec probabilité p ou échec avec probabilité $1 - p$.)
- Si X est la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus lors de ces n répétitions, alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

• **Exemple typique.** On lance n fois, de manière indépendante, une pièce donnant Pile avec probabilité p . On note X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenues. Alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Exercice 3 — 1. Vérifier que les relations de la définition ci-dessus définissent une distribution de probabilité.

2. Démontrer la formule donnant l'espérance de la loi $\mathcal{B}(n, p)$ dans le cas où $p > 0$.