

## 4 Généralisation au cas de $n$ variables aléatoires

- **Cadre.** •  $(\Omega, P)$  est un espace probabilisé fini •  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires sur  $\Omega$  ( $n \geq 2$ ).

### Définition 1

Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont dites indépendantes si pour toutes parties  $A_1 \subset X_1(\Omega), \dots, A_n \subset X_n(\Omega)$ , les événements  $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\}$  sont indépendants.

C'est équivalent à :  $\forall x_1 \in X_1(\Omega), \dots, \forall x_n \in X_n(\Omega), \quad P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times \dots \times P(X_n = x_n)$

- **Rappel.** On rappelle que l'on note :  $P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$  au lieu de  $P(\{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_n = x_n\})$ .

### Démonstration de l'équivalence.

- Supposons  $X_1, \dots, X_n$  indépendantes.

Soit  $x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$ . En appliquant la définition de l'indépendance avec  $A_1 = \{x_1\}, \dots, A_n = \{x_n\}$  :

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(\{X_1 \in A_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in A_n\}) \stackrel{\text{indép.}}{=} P(X_1 \in A_1) \dots P(X_n \in A_n) = P(X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n)$$

- Réciproquement, supposons :  $\forall x_1 \in X_1(\Omega), \dots, \forall x_n \in X_n(\Omega), \quad P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n)$   
Montrons que  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes.

- Soient  $B_1 \subset X_1(\Omega), \dots, B_n \subset X_n(\Omega)$ . Montrons d'abord <sup>1</sup> :  $P(\{X_1 \in B_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in B_n\}) = P(X_1 \in B_1) \dots P(X_n \in B_n)$

$$\text{En posant } B = B_1 \times \dots \times B_n : \quad \{X_1 \in B_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in B_n\} = \bigcup_{(x_1, \dots, x_n) \in B} \{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_n = x_n\}$$

La réunion étant incompatible :

$$P(\{X_1 \in B_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in B_n\}) = \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in B} P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in B} P(X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n) = \left( \sum_{x_1 \in B_1} P(X_1 = x_1) \right) \dots \left( \sum_{x_n \in B_n} P(X_n = x_n) \right) \stackrel{=P(X_1 \in B_1)}{\quad} \stackrel{=P(X_n \in B_n)}{\quad}$$

- Soient  $A_1 \subset X_1(\Omega), \dots, A_n \subset X_n(\Omega)$ . Montrons que  $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\}$  sont indépendants.

Soit donc une partie  $I$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Il s'agit de montrer :  $P\left(\bigcap_{i \in I} \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i \in I} P(X_i \in A_i)$ .

On se ramène au premier point en posant, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  : •  $B_i = A_i$  si  $i \in I$  •  $B_i = X_i(\Omega)$  si  $i \notin I$

Par construction : •  $\{X_i \in B_i\} = \{X_i \in A_i\}$  si  $i \in I$  •  $\{X_i \in B_i\} = \Omega$  si  $i \notin I$

et le premier point permet d'écrire :  $P\left(\bigcap_{i \in I} \{X_i \in A_i\}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in B_i\}\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in B_i) = \prod_{i \in I} P(X_i \in A_i)$

### Théorème 1 : Lemme des coalitions

Supposons que  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes. Alors  $f(X_1, \dots, X_m)$  et  $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$  le sont aussi.

- **Remarque.** Posons  $X = (X_1, \dots, X_m)$  et  $Y = (X_{m+1}, \dots, X_n)$ . Il s'agit de variables aléatoires à valeurs dans des ensembles produits. Par exemple,  $X$  est l'application  $\omega \mapsto (X_1(\omega), \dots, X_m(\omega))$  définie sur  $\Omega$  et son image  $X(\Omega)$  est un sous-ensemble de  $X_1(\Omega) \times \dots \times X_m(\Omega)$ . Il en va de même pour  $Y$ .

La fonction  $f$  est ici une fonction définie sur  $X(\Omega)$  et  $g$  est définie sur  $Y(\Omega)$ .

### Démonstration du théorème.

- Montrons d'abord que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes. Soient  $x = (x_1, \dots, x_m) \in X(\Omega)$  et  $y = (x_{m+1}, \dots, x_n) \in Y(\Omega)$ .

$$P(X = x, Y = y) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \stackrel{\text{indép.}}{=} \underbrace{P(X_1 = x_1) \times \dots \times P(X_m = x_m)}_{\substack{= P(X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m) = P(X=x) \\ \text{indép.}}} \times \underbrace{P(X_{m+1} = x_{m+1}) \times \dots \times P(X_n = x_n)}_{\substack{= P(X_{m+1} = x_{m+1}, \dots, X_n = x_n) = P(Y=y) \\ \text{indép.}}}$$

- Montrons maintenant que  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes. Soient  $u \in f(X)(\Omega)$  et  $v \in g(Y)(\Omega)$ .

En posant :  $A = f^{-1}(\{u\})$  (ensemble des antécédents de  $u$  par  $f$ ) et  $B = g^{-1}(\{v\})$

$$P(\{f(X) = u\} \cap \{g(Y) = v\}) = P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) \stackrel{\text{indép.}}{=} P(X \in A) P(Y \in B) = P(f(X) = u) P(g(Y) = v)$$

### ■ Complément (Hors programme) : Existence de variables aléatoires indépendantes de lois prescrites

A l'image de ce qui a été vu dans le cas d'une variable aléatoire, on souhaite justifier les énoncés du type « soit  $(X_1, \dots, X_n)$  une famille de variables aléatoires indépendantes de loi ... » sans avoir à définir un espace probabilisé  $(\Omega, P)$ .

Détaillons le cas  $n = 2$ . Soient  $(p_i)_{i \in E}$  et  $(q_j)_{j \in F}$  des distributions de probabilité sur deux ensembles finis  $E$  et  $F$ , il s'agit de montrer qu'il existe un espace probabilisé  $(\Omega, P)$  et des variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sur  $\Omega$  d'images respectives  $E$  et  $F$  vérifiant :

- i) Pour tous  $i \in E$  et  $j \in F$  :  $P(X = i) = p_i$  et  $P(Y = j) = q_j$ . ii)  $X$  et  $Y$  sont indépendantes

Pour cela il suffit de constater que la famille  $(p_i q_j)_{(i,j) \in E \times F}$  est une distribution de probabilité sur  $E \times F$  car  $\sum_{i \in E, j \in F} p_i q_j = \left( \sum_{i \in E} p_i \right) \left( \sum_{j \in F} q_j \right) = 1$ .

Il existe donc un espace probabilisé  $(\Omega, P)$  et une variable aléatoire  $(X, Y)$  sur  $\Omega$  telle que pour tout  $(i, j) \in E \times F$  :  $P(X = i, Y = j) = p_i q_j$ . Les variables  $X$  et  $Y$  ainsi construites satisfont les deux conditions requises car :

$$i) \text{ Pour tout } i \in E : P(X = i) = \sum_{j \in F} P(X = i, Y = j) = \sum_{j \in F} p_i q_j = p_i \text{ et de même, pour tout } j \in F : P(Y = j) = q_j.$$

$$ii) \text{ Pour tout } (i, j) \in E \times F : P(X = i, Y = j) = p_i q_j = P(X = i) P(Y = j)$$

1. Ce n'est pas l'indépendance des événements  $\{X_1 \in B_1\}, \dots, \{X_n \in B_n\}$  qui exige  $P(\bigcap_{i \in I} \{X_i \in B_i\}) = \prod_{i \in I} P(X_i \in B_i)$  pour tout  $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ .