

1 Calculs dans $[0, +\infty]$ Prolongement de l'ordre et des opérations à $[0, +\infty]$

- *Ordre* $\leq$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$:
- *Addition*. Pour tout $x \in [0, +\infty]$:
- *Multiplication*. Pour tout $x \in]0, +\infty]$: et $0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 \stackrel{\text{déf.}}{=}$
- *Borne supérieure*. Toute partie de $[0, +\infty]$ possède une borne supérieure dans $[0, +\infty]$.

2 Somme d'une famille d'éléments de $[0, +\infty]$

- **Cadre.** $(u_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $[0, +\infty]$ • On note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I

Définition 1

La somme de la famille $(u_i)_{i \in I}$ est l'élément de $[0, +\infty]$:

- **Remarque.** Si I est fini, cette notion coïncide avec la notion usuelle de somme (finie).

- **Remarque.** Si l'un des u_i vaut $+\infty$: $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$

- **Cas des séries.** Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs :
$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n & \text{si la série converge} \\ +\infty & \text{si la série diverge} \end{cases}$$

Exercice 1 — Démontrer le résultat sur le cas des séries à termes positifs.

3 Règles de calcul

Théorème 1 : Sommation par paquets (admis)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $[0, +\infty]$.

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I :
$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i$$

Théorème 2 : Opérations

Soit $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ des familles de $[0, +\infty]$.

- *Linéarité.* Pour tout réel positif λ :
- *Croissance.* Si $u_i \leq v_i$ pour tout $i \in I$:
- *Invariance par permutation.* Pour toute permutation σ de I :

Exercice 2 — Démontrer ce théorème

Théorème 3 : Fubini

Soit $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de $[0, +\infty]$:

Exercice 3 — Démontrer le théorème de Fubini à l'aide du théorème de sommation par paquets

SF 4 : utiliser le théorème de Fubini pour intervertir des sommes

Exemple 1 **SF 4** — a) Calculer $\sum_{p,q \in \mathbb{N}} \frac{p^q}{e^{2p} q!}$ b) Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1)$ où pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

SF 6 : intervertir des sommes « triangulaires »

Exemple 2 **SF 6** — a) Etablir : $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = \zeta(2)$ b) Justifier la convergence et calculer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$

SF 7 : sommer à « $p+q$ constant »

Exemple 3 **SF 7** — Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la somme $\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{p}{(p+q)^\alpha}$ est-elle réelle ?

En pratique : utiliser une décomposition en éléments simples

Exemple 4 **SF 6** — Montrer que : $\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{pq(p+q-1)} = 2\zeta(2)$.