

- 1 • **Sommabilité.** Dans $[0, +\infty]$: $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^n$.

Sommer par paquets avec la partition $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{N}^*$ puis poser $m = -n$ dans la première somme ce qui fait apparaître deux sommes géométriques de raison r .

- **Somme.** Procéder exactement de la même façon : on obtient deux sommes géométriques, l'une de raison $re^{-i\theta}$ et l'autre de raison $re^{i\theta}$.

Réponse après réduction au même dénominateur :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$$

- 2 En utilisant le recouvrement disjoint $\mathbb{N}^* = \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ on peut

écrire dans $[0, +\infty]$: $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{f(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n$ où $s_n = \sum_{k \in I_n} \frac{1}{f(k)}$.

Il s'agit de montrer que $\sum s_n$ converge ssi $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ converge.

Pour cela commencer par encadrer s_n en montrant que :

$$\frac{|I_n|}{n+1} \leq s_n \leq \frac{|I_n|}{n} \quad \text{et} \quad |I_n| = \lfloor f^{-1}(n+1) \rfloor - \lfloor f^{-1}(n) \rfloor$$

- Si $\sum s_n$ converge. En sommant ① pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ puis en séparant les sommes et en réindexant on obtient :

$$\sum_{k=1}^n s_k \geq \frac{\lfloor f^{-1}(n+1) \rfloor}{n+1} - \frac{\lfloor f^{-1}(1) \rfloor}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{\lfloor f^{-1}(k) \rfloor}{k(k+1)}$$

La dernière somme est minorable par $\sum_{k=1}^n \frac{\lfloor f^{-1}(k) \rfloor}{k^2}$. Ce qui

permet de majorer les sommes partielles de $\sum \frac{\lfloor f^{-1}(n) \rfloor}{n(n+1)}$

qui est de même nature que $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$

- Si $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ converge En sommant de même ② :

$$\sum_{k=1}^n s_k \leq \underbrace{\frac{\lfloor f^{-1}(n+1) \rfloor}{n}}_{u_n} - \lfloor f^{-1}(1) \rfloor + \underbrace{\sum_{k=2}^n \frac{\lfloor f^{-1}(k) \rfloor}{k(k-1)}}_{S_n} \leq u_n + S_n$$

Les sommes partielles de $\sum \frac{\lfloor f^{-1}(n) \rfloor}{n^2}$ sont par hypothèse majorées ce qui permet de :

- Majorer $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ car $\frac{\lfloor f^{-1}(k) \rfloor}{k(k-1)} \sim \frac{\lfloor f^{-1}(k) \rfloor}{k^2}$

- Majorer (u_n) en notant que

$$\frac{\lfloor f^{-1}(n+1) \rfloor}{4n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\lfloor f^{-1}(k) \rfloor}{k^2}$$

- 3 1. $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k$ où $1 \leq b_1 < \dots < b_n$ sont les valeurs de $\{a_1, \dots, a_n\}$ triées par ordre croissant. Vérifier alors que $b_k \geq k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

2. En utilisant le recouvrement disjoint

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} I_n$$

$$\sum_{n \geq 2} \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln n} = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n \quad \text{où} \quad s_n = \sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+1}-1} \frac{\sigma(k)}{k^2 \ln k}.$$

En majorant le dénominateur puis en utilisant la question 1., on montre que :

$$s_n \geq \frac{1}{2^{2n+2} \ln(2^{n+1})} \times \frac{2^n(2^n+1)}{2}$$

qui est le terme général d'une série divergente.

- 4 En utilisant le recouvrement disjoint $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ on peut

écrire dans $[0, +\infty]$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n$ où $s_n = \sum_{k \in I_n} \frac{1}{|z_k|^\alpha}$.

Montrer que I_n est fini et que $|I_n| = O(n)$ en remarquant que la réunion des disques ouverts de centre z_k et de rayon $\frac{1}{2}$ pour tout $k \in I_n$ est incluse dans la couronne $\left\{z \in \mathbb{C} \mid n - \frac{1}{2} \leq |z| \leq n + \frac{3}{2}\right\}$.

- 5 On obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 2e$ par un calcul dans $[0, +\infty]$ en :

- Echangeant les sommes triangulaires avec par sommation par paquets avec **SF 6**

- Calculant la somme $\sum_{n=0}^k \frac{1}{k!}$ qui apparaît comme
 indép. de n
 somme intérieure

- Calculant les deux séries exponentielles qui en résultent.

- 6 On obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\alpha-1}$ par un calcul dans $[0, +\infty]$ en :

- Echangeant les sommes triangulaires avec par sommation par paquets avec **SF 6**

- Calculant la somme $\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{k^\alpha}$ qui apparaît comme
 indép. de n
 somme intérieure

- 7 On obtient $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ par un calcul dans $[0, +\infty]$ en :

- Remplaçant u_k par $k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n(n+1)}$

- Echangeant les sommes triangulaires avec **SF 6**

- Calculant la somme $\sum_{k=1}^n k$ qui apparaît comme somme intérieure

Le résultat obtenu justifie la convergence.

- 8 En observant que $a_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \Delta_n$, exprimer formellement

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$ comme une somme triangulaire puis utiliser **SF 6**

Le calcul formel est justifié a posteriori en montrant que la famille $\left(\frac{\Delta_p}{n}\right)_{\substack{n,p \in \mathbb{N}^* \\ n \leq p}}$ est sommable.

Pour cela, montrer (de même) que $\sum_{\substack{n,p \in \mathbb{N}^* \\ n \leq p}} \frac{|\Delta_p|}{n} = \sum_{p=1}^{+\infty} |\Delta_p| H_p$ et justifier que le résultat est fini par critère d'équivalence.

9 Utiliser $w_n \leq \left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p\right)^2$ pour majorer (dans $[0, +\infty]$)

$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{w_n}{n}}$ par une somme triangulaire. Montrer alors que la somme obtenue est finie en calculant un équivalent de $\sum_{n=1}^p \frac{1}{\sqrt{n}}$ par comparaison série-intégrale.

10 a) Commencer par sommer à $p+q$ constant dans $[0, +\infty]$:

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q)^\alpha} \stackrel{\text{SF 7}}{=} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n^\alpha}$$

Puis utiliser le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs.

Réponse : La famille est sommable ssi $\alpha > 2$

b) Utiliser : $\frac{1}{2}(p+q)^2 \leq p^2 + q^2 \leq (p+q)^2$ pour encadrer la somme dans $[0, +\infty]$ par une somme similaire à celle de la question a). Réponse : La famille est sommable ssi $\alpha > 1$

c) En sommant à $p+q$ constant dans $[0, +\infty]$ (**SF 7**) puis en séparant la somme intérieure on fait apparaître la somme des k et la somme des k^2 qui, une fois calculées donnent

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{pq}{(p+q)^\alpha} = \frac{1}{6} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2 - 1}{n^{\alpha-1}}$$

Utiliser le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs.

Réponse : La famille est sommable ssi $\alpha > 4$

d) Commencer par montrer que

$$p^\alpha + q^\alpha \leq 2(p+q)^\alpha \quad \text{et} \quad (p+q)^\alpha \leq 2^\alpha(p^\alpha + q^\alpha)$$

(pour la seconde distinguer les cas où $p \geq q$ et $p \leq q$)

Ceci permet d'encadrer la somme dans $[0, +\infty]$ par la somme de la question a).

11 Commencer par un calcul formel en sommant à $p+q$ constant :

$$S = \sum_{p,q \in \mathbb{N}} \frac{a^p b^q}{(p+q)!} \stackrel{\text{SF 7}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^n a^p b^{n-p}$$

Pour calculer la somme intérieure :

• Si $a \neq b$, utiliser $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{p=0}^n a^p b^{n-p}$

pour faire apparaître deux séries exponentielles :

$$\text{Réponse : } S = \frac{ae^a - be^b}{a-b}.$$

• Si $a = b$, la somme intérieure vaut $(n+1)a^n$ ce qui permet

ensuite de séparer la somme en n en deux séries exponentielles

$$\text{Réponse : } S = (a+1)e^a.$$

Justifier le calcul a posteriori en montrant que $\left(\frac{a^p b^q}{(p+q)!}\right)_{p,q \in \mathbb{N}}$ est sommable : il suffit pour cela de calculer $\sum_{p,q \in \mathbb{N}} \frac{|a|^p |b|^q}{(p+q)!}$ dans $[0, +\infty]$ exactement de la même façon.

• **Sommabilité.** Par majoration avec

$$\left| \frac{(-1)^{p+q}}{2^p 3^q (p+q+1)} \right| \leq \frac{1}{2^p 3^q}$$

• **Somme.** Sommer à « $p+q$ constant »

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{p+q}}{2^p 3^q (p+q+1)} \stackrel{\text{SF 7}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^n}{2^p 3^{n-p} (n+1)}$$

La somme en p se ramène à une somme géométrique de raison $\frac{3}{2}$.

On obtient :

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{p+q}}{2^p 3^q (p+q+1)} = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Réindexer les sommes via $k = n+1$ puis utiliser le résultat fourni par l'énoncé avec : $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{3}$.

$$\text{Réponse : } \sum_{p,q \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{p+q}}{2^p 3^q (p+q+1)} = 12 \ln 3 - 18 \ln 2$$

13 1. Sommer à « $p+q$ constant »

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{pq^2 + p^2q} \stackrel{\text{SF 7}}{=} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)}$$

Effectuer une D.E.S. de $\frac{1}{X(n-X)}$ dans la somme intérieure puis séparer et réindexer la deuxième somme.

2. Avec Fubini positif :

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{pq^2 + p^2q} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q(p+q)}$$

Effectuer une D.E.S. de $\frac{1}{X(p+X)}$ puis remarquer que

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q} - \frac{1}{p+q} = H_p \quad (\text{observer les termes communs aux deux sommes qui se simplifient}).$$

14 Exprimer formellement la somme comme une somme

double en utilisant « $\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ » :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{1-z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Utiliser ensuite le théorème de sommation par paquets en découpant $\mathbb{N}^*$ à « à valuation 2-adique constante » i.e. avec

la partition : $\mathbb{N}^* = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\{2^n(2k+1); k \in \mathbb{N}\}}_{\text{Ensemble des } a \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } v_2(a) = n}$

La somme devient : $S = \sum_{a=1}^{+\infty} z^a$.

Le calcul se justifie a posteriori en prouvant que la famille $(z^a)_{a \in \mathbb{N}^*}$ est sommable.

15 a) Utiliser le théorème sur les familles « produit »

Réponse : $S_1 = \frac{\pi^4}{36}$.

b) utiliser le théorème de sommation par paquets avec la partition :

$$\{(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid p \mid q\} = \bigcup_{p=1}^{+\infty} \left\{ \left(p, \frac{k}{p} \right); k \geq 1 \right\}$$

Réponse : $S_2 = \frac{\pi^6}{540}$.

c) On peut exprimer S_1 en fonction de S_3 en découpant $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ « à PGCD constant ». Précisément, réexprimer S_1 à l'aide du théorème de sommation par paquets avec la partition :

$$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = \bigcup_{d=1}^{+\infty} \{(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid p \wedge q = d\}$$

puis effectuer le changement d'indice $(p, q) = (dp', dq')$ dans la somme intérieure.

Réponse : $S_3 = \frac{5}{2}$.

16 1. Dans $[0, +\infty]$:

- calculer le produit $\zeta(\alpha) \times \zeta(\alpha)$ en utilisant le théorème sur les familles « produit »
- utiliser le théorème de sommation par paquets avec la partition : $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{ \left(d, \frac{n}{d} \right); d \geq 1 \text{ et } d \mid n \right\}$

2. Même principe.

17 1. Remarquer que $|\lambda(n)| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis procéder par critère d'équivalence en utilisant la convergence de $\sum |x|^n$.

2. Pour la première égalité :

- Remarquer que $\frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} x^{nk}$
- utiliser le théorème de sommation par paquets avec la partition :

$$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = \bigcup_{m=1}^{+\infty} \left\{ \left(d, \frac{m}{d} \right); d \geq 1 \text{ et } d \mid m \right\}$$

La deuxième égalité repose sur le calcul explicite de $\sigma(m)$ pour tout $m \geq 1$. Il s'agit plus précisément de montrer que $\sigma(m) = 1$ si m est le carré d'un entier i.e. $m = n^2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma(m) = 0$ sinon.

Pour cela, noter que si m est décomposé en facteurs premiers : $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ alors les diviseurs de m sont les $d = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$ pour $0 \leq k_1 \leq \alpha_1, \dots, 0 \leq k_n \leq \alpha_n$. Les propriétés de λ assurent que $\lambda(d) = (-1)^{k_1} \times \dots \times (-1)^{k_n}$

ce qui donne : $\sigma(m) = \left(\sum_{k_1=0}^{\alpha_1} (-1)^{k_1} \right) \times \dots \times \left(\sum_{k_n=0}^{\alpha_n} (-1)^{k_n} \right)$

Il suffit alors de calculer les sommes géométriques en notant que le résultat vaut 0 si l'un des α_i est impair et 1 si tous les α_i sont pairs.

18 1. Si n est décomposé en facteurs premiers :

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$$

alors les diviseurs de n sont les $d = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ pour $0 \leq k_1 \leq \alpha_1, \dots, 0 \leq k_r \leq \alpha_r$. La définition de Λ assure que la somme se réduit aux termes de la forme $\Lambda(p_i^{k_i})$ pour $1 \leq k_i \leq \alpha_i$ (k_i termes qui valent tous $\ln(p_i)$).

2. Utiliser le théorème de sommation par paquets avec la partition :

$$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = \bigcup_{m=1}^{+\infty} \left\{ \left(d, \frac{m}{d} \right); d \geq 1 \text{ et } d \mid m \right\}$$

3. Par comparaison série-intégrale montrer que :

$$\zeta(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 1^+}{=} \frac{1}{\alpha-1} + O(1) \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)^2} + O\left(\frac{1}{(\alpha-1)}\right)$$

et en déduire avec la question précédente que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\alpha} \underset{\alpha \rightarrow 1^+}{=} \frac{1}{\alpha-1} + O(1)$$

Avec la définition de Λ :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\alpha} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln p}{p^\alpha} + \underbrace{\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln p}{p^{k\alpha}}}_{=R(\alpha)}$$

Montrer que $R(\alpha) = O(1)$ en le majorant indépendamment de α par exemple en notant que

$$0 \leq R(\alpha) \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^k}$$

puis en montrant que la dernière somme obtenue est finie.

19 Commencer par un calcul formel en écrivant :

$$\sum_{p,q \geq 2} \frac{(-1)^p}{q^p} = \sum_{q=2}^{+\infty} \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{-1}{q} \right)^p$$

La somme intérieure est une somme géométrique de raison $\frac{-1}{q}$ donc calculable explicitement. On obtient ensuite une somme télescopique (via une D.E.S.).

$$\text{Réponse : } \sum_{p,q \geq 2} \frac{(-1)^p}{q^p} = \frac{1}{2}$$

Le calcul est justifié a posteriori par le théorème de Fubini à condition que la famille $\left(\frac{(-1)^p}{q^p} \right)_{p,q \geq 2}$ soit sommable : calculer $\sum_{p,q \geq 2} \frac{1}{q^p}$ dans $[0, +\infty]$ exactement de la même façon que dans le calcul formel.

20 Dans chaque cas, pour l'étude de sommabilité, calculer

$\sum_{(i,j) \in I \times J} |u_{i,j}|$ dans $[0, +\infty]$ où « tout est permis ». Lorsque le résultat est fini, le calcul de $\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j}$ se conduit de la même façon

a) On fait apparaître une somme double avec une série géométrique (en p) et une série exponentielle (en q).

Réponse :

la famille est sommable ssi $|z| < 1$ et $\sum_{p,q \in \mathbb{N}} \frac{z^p}{q!} = \frac{e}{1-z}$

b) Avec le théorème de Fubini, on a affaire à une série exponentielle deux fois d'affilée.

Réponse :

la famille est toujours sommable et $\sum_{p,q \in \mathbb{N}} \frac{q^p z^p}{p! q!} = e^{e^z}$

c) Sommer à « $p+q$ constant » (SF 7) on fait apparaître une somme binomiale, puis une série géométrique.

Réponse : la famille est sommable ssi $|z| < \frac{1}{2}$ et dans ce cas

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}} \binom{p+q}{p} z^{p+q} = \frac{1}{1-2z}$$

d) Réponse : La famille n'est jamais sommable.

21 1. Sous réserve de sommabilité de la famille $(z^{p(2q-1)})_{p,q \geq 1}$, le théorème de Fubini permet d'écrire :

$$\sum_{p,q \geq 1} z^{p(2q-1)} = \sum_{q=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} (z^{2q-1})^p}_{\text{somme géo de raison } z^{2q-1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{z^p} \underbrace{\sum_{q=1}^{+\infty} (z^{2p})^q}_{\text{somme géo de raison } z^{2p}}$$

Le résultat s'obtient en explicitant les sommes géométriques.

Pour justifier la sommabilité, en procédant de même avec Fubini positif, on obtient :

$$\sum_{p,q \geq 1} |z|^{p(2q-1)} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{|z|^p}{1-|z|^{2p}}$$

Justifier que le résultat est fini par exemple par critère d'équivalence à l'aide d'un équivalent de $\frac{|z|^p}{1-|z|^{2p}}$

2. Remarquer que : $\frac{z^{p+1}}{1-z^{p+1}} = \sum_{q=1}^{+\infty} z^{q(p+1)}$

Procéder alors de la même façon qu'à la question 1 avec la famille $((-1)^p z^{q(p+1)})_{p \geq 0, q \geq 1}$.

22 Exprimer formellement $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}(2n+1)}$ comme une somme double en utilisant

$$\frac{1}{\text{ch}(2n+1)} = \frac{2}{e^{2n+1}} \frac{1}{1+e^{-2(2n+1)}} = \frac{2}{e^{2n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k(2n+1)}$$

En intervertissant les sommes doubles, faire apparaître une nouvelle somme géométrique.

Le calcul se justifie a posteriori en prouvant à l'aide du théorème de Fubini positif que la famille $(2(-1)^k e^{-(2k+1)(2n+1)})_{k,n \in \mathbb{N}}$ est sommable,

23 1. La somme est définie dans $[0, +\infty]$ et vaut :

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)-1}{n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{k}\right)^n$$

Utiliser le théorème de Fubini puis calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{k}\right)^n$ en remarquant que la formule donnée par l'énoncé évaluée en $-x$ donne :

$$\forall x \in [-1, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x)$$

$$\text{On obtient : } S = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\ln(k) - \ln(k-1) - \frac{1}{k} \right).$$

Revenir aux sommes partielles $S = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^N \dots$ en utilisant $H_N = \ln N + \gamma + o(1)$.

2. Attention, utiliser le théorème de Fubini est ici illégal. Précisément on ne peut pas écrire :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{k}\right)^n = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{1}{k}\right)^n$$

parce que la famille $(u_{k,n})_{k \geq 1, n \geq 2} = \left(\frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{k}\right)_{k \geq 1, n \geq 2}$ n'est pas sommable (la sous-famille $(u_{1,n})_{n \geq 1}$ ne l'est pas)

En revanche, la question 1. assure que l'on peut écrire :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)-1}{n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{k}\right)^n = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{1}{k}\right)^n$$

parce que la famille $\left(\frac{1}{n} \frac{1}{k}\right)_{k \geq 2, n \geq 2}$ est sommable.

L'idée est donc d'écrire :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)-1}{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

puis :

- De calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)-1}{n}$ avec le théorème de Fubini (calcul similaire à celui de la question 1.)

- De calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ en utilisant la formule de l'énoncé avec $x = 1$

24 En sommant d'abord par paquet à l'aide des ensembles $I_k = \{n \in \mathbb{Z} \mid 2^k < v_n \leq 2^{k+1}\}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ puis en intervertissant les sommes obtenues avec le théorème de Fubini on obtient : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n^\alpha \leq \frac{2^\alpha}{1-2^{1-\alpha}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n^\alpha$

25 1. Se donner une partition multiplicative de n revient à se donner une liste d'exposants $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ tels que $2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} \dots n^{\alpha_n} = n$ (où α_i est le nombre de facteurs d_j tel que $d_j = i$). En conséquence $u_n = |E_n|$ où

$$E_n = \{(\alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \mid 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} \dots n^{\alpha_n} = n\}$$

2. Avec le résultat de 1. et le théorème sur les familles pro-

duits, majorer $\frac{u_n}{n^s}$ par $\prod_{i=2}^n \sum_{\alpha=0}^{+\infty} \frac{1}{i^{\alpha s}} = \prod_{i=2}^n \frac{1}{1-i^{-s}}$.

Il suffit de montrer que cette dernière quantité est majorée (elle est positive). En prenant son logarithme il suffit par exemple de montrer que $\sum_{i=1}^{+\infty} -\ln(1-i^{-s}) < +\infty$ (utiliser le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs).

26 Avec Fubini positif :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$

En effectuant une D.E.S. de $\frac{1}{(X+q^2)(X+q^2+1)}$, la somme intérieure devient télescopique.

27 Plusieurs possibilités pour calculer $S = \sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{pq(p+q+1)}$ dans $[0, +\infty]$

• Option 1. A « $p+q$ constant » $S = \sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \sum_{n=2}^{p+q} \frac{1}{(n+1)k(n-k)}$ (SF 7)
En effectuant une D.E.S. de $\frac{1}{X(n-X)}$ dans la somme intérieure puis après séparation et réindexation

$$S = 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Il reste à échanger les sommes triangulaires (SF 6) pour faire apparaître des télescopes via $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

• Option 2. Avec Fubini positif : $S = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q(p+q+1)}$
En effectuant une D.E.S. de $\frac{1}{X(X+p+1)}$ puis après simplifications : $S = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{p+1} \frac{1}{qp(p+1)}$.

Il reste à échanger les sommes triangulaires (SF 6) en mettant de côté les termes correspondants à $q=1$ pour faire apparaître des télescopes grâce à $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.

28 Par décomposition $F(X) = \frac{1}{X(X+1)\dots(X+n)}$ en éléments simples.

$$\text{Réponse à trouver : } F(X) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \frac{1}{X+k}$$

Le résultat s'obtient formellement en remplaçant $\frac{1}{z(z+1)\dots(z+n)}$ à l'aide de la DES puis en intervertissant les sommes triangulaires (SF 6).

Justifier le calcul a posteriori en montrant que la famille $\left(\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \frac{1}{z+k} \right)_{k,n \in \mathbb{N}^*, k \leq n}$ est sommable : on obtient de même

$\sum_{\substack{k,n \in \mathbb{N}^* \\ k \leq n}} \frac{1}{k!(n-k)!} \frac{1}{|z+k|} = e \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!|z+k|}$. Justifier que le résultat est fini par exemple par critère d'équivalence.

29 $\sum w_n$ est le produit de Cauchy de $\sum \frac{1}{2^n}$ et de $\sum \frac{3^n}{n!}$.

30 Utiliser la factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$ pour faire apparaître un produit de Cauchy.

31 Procéder par récurrence sur p . Pour l'hérédité écrire :

$$\frac{1}{(1-z)^{p+2}} = \frac{1}{(1-z)^{p+1}} \times \frac{1}{1-z}$$

puis utiliser le théorème relatif à la convergence absolue du produit de Cauchy de $\sum \binom{n+p}{p} z^n$ et $\sum z^n$.

32 N.B. Si on suppose $\sum b_n$ absolument convergente, alors il s'agit d'une conséquence du théorème sur le produit de Cauchy. L'objet de l'exercice est de montrer que la convergence de la série $\sum c_n$ reste valable sans l'hypothèse de convergence absolue sur $\sum b_n$: c'est le théorème de MERTENS
Revenir aux sommes partielles. Poser pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$A_N = \sum_{n=0}^N a_n \quad B_N = \sum_{n=0}^N b_n \quad \text{et} \quad C_N = \sum_{n=0}^N c_n$$

Il suffit de montrer que $C_N - A_N B_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

Commencer par montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$C_N - A_N B_N = \sum_{k=0}^N a_k (B_{N-k} - B_N)$$

Revenir à la définition de la limite. Etant donné $\varepsilon > 0$, les hypothèses assurent l'existence de n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \right| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| \leq \varepsilon$$

Ensuite : $|C_N - A_N B_N| \leq \sum_{k=0}^N |a_k| |B_{N-k} - B_N|$.

Pour $N \geq 2n_0$, couper la somme en deux en l'indice $k = n_0$:

• Dans $\sum_{k=0}^{n_0} |a_k| |B_{N-k} - B_N|$, on peut majorer :

- les $|B_{N-k} - B_N|$ par 2ε
- $\sum_{k=0}^{n_0} |a_k|$ par une constante M .

• Dans $\sum_{k=n_0+1}^N |a_k| |B_{N-k} - B_N|$, on peut majorer :

- les $|B_{N-k} - B_N|$ par une constante M'
- puis $\sum_{k=n_0+1}^N |a_k|$ par ε .