

Notation. Pour tout $\alpha > 1$, on pose : $\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Sommation par paquets

1 **SF 1 SF 2** Soit $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Justifier la sommabilité et calculer la somme de $(r^{|n|} e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$.

2 **SF 1** Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, bijective et strictement croissante. Montrer que $\sum \frac{1}{f(n)}$ et $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.
Indication : considérer les ensembles $I_n = \{k \in \mathbb{N}^* \mid n < f(k) \leq n+1\}$.

3 **SF 1**
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$ deux à deux distincts. Montrer que : $\sum_{k=1}^n a_k \geq \sum_{k=1}^n k$.

2. Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Montrer que la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln n}$ est divergente.
Indication : considérer les ensembles $I_n = \{k \in \mathbb{N}^* \mid 2^n < k \leq 2^{n+1}\}$.

4 **SF 1** Soit $\alpha > 2$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls tels que : $|z_n - z_m| \geq 1$, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ distincts. Montrer que la série $\sum \frac{1}{|z_n|^\alpha}$ converge.
Indication : considérer les ensembles $I_n = \{k \in \mathbb{N} \mid n \leq |z_k| < n+1\}$.

Sommes triangulaires

5 **SF 6** Calculer $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

6 **SF 6** Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ est-elle réelle?

7 **SF 6** Soit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$, positive, telle que $\sum \alpha_n$ converge. Pour tout entier $k \geq 1$, on pose : $u_k = k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n(n+1)}$. Montrer que la série $\sum u_k$ converge et calculer sa somme.

8 **SF 2 SF 6** Soit $(a_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de limite nulle. Pour tout $n \geq 1$, on pose : $\Delta_n = a_n - a_{n+1}$. On suppose que la série $\sum \Delta_n \ln n$ converge absolument. Montrer que $\sum \frac{a_n}{n}$ converge et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \Delta_n H_n$ où : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

9 **SF 6** Soit $(a_n)_{n \geq 1}$, positive, telle que $\sum \sqrt{n} a_n$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $w_n = \sum_{p=n}^{+\infty} a_p^2$. Montrer que la série $\sum \sqrt{\frac{w_n}{n}}$ converge.

Sommes « à $p+q$ constant »

10 **SF 1 SF 7** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la sommabilité de :

- a) $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{p,q \geq 1}$ b) $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{p,q \geq 1}$
c) $\left(\frac{pq}{(p+q)^\alpha}\right)_{p,q \geq 1}$ d) $\left(\frac{1}{p^\alpha + q^\alpha}\right)_{p,q \geq 1}$

11 **SF 2 SF 7** Soit $a, b \in \mathbb{C}$.

Justifier l'existence et calculer : $\sum_{p,q \geq 0} \frac{a^p b^q}{(p+q)!}$

12 **SF 2 SF 7** On admet :

$$\forall x \in]-1, 1], \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

Justifier l'existence et calculer : $\sum_{p,q \geq 0} \frac{(-1)^{p+q}}{2^p 3^q (p+q+1)}$

13 **SF 4 SF 7** On souhaite établir : $\sum_{p,q \geq 1} \frac{1}{pq^2 + p^2q} = 2\zeta(3)$.

1. A l'aide d'une sommation par paquets, montrer que :

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{pq^2 + p^2q} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^2} - 2\zeta(3)$$

2. A l'aide, du théorème de Fubini, montrer que :

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{pq^2 + p^2q} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^2}$$

puis conclure.

Découpages à base d'arithmétique

14 **SF 2** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

Montrer que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1-z}$

15 **SF 5** On admet que : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. Calculer :

a) $S_1 = \sum_{p,q \geq 1} \frac{1}{p^2 q^2}$ b) $S_2 = \sum_{\substack{p,q \geq 1 \\ p|q}} \frac{1}{p^2 q^2}$ c) $S_3 = \sum_{\substack{p,q \geq 1 \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{p^2 q^2}$

16 **SF 5** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note :

- d_n est le nombre de diviseurs positifs de n .
- s_n est la somme des diviseurs positifs de n .

1. Montrer que pour tout $\alpha > 1$: $(\zeta(\alpha))^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^\alpha}$

2. Montrer que pour tout $\alpha > 2$: $\zeta(\alpha)\zeta(\alpha-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s_n}{n^\alpha}$

17 **SF 1 SF 2** Soit $\lambda : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant : $\lambda(1) = 1$, $\lambda(p) = -1$ pour tout $p \in \mathbb{P}$ et : $\lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n)$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier que la série $\sum \lambda(n) \frac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument pour tout $x \in]-1, 1[$. On note $N(x)$ sa somme.

2. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\sigma(m) = \sum_{d|m} \lambda(d)$.

Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$: $N(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sigma(m)x^m$

3. En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$: $N(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$

18 **SF 5** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{si } n = p^k \text{ pour certains } p \in \mathbb{P} \text{ et } k \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n$

2. Montrer que pour tout $\alpha > 1$: $\zeta(\alpha) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha}$

3. En déduire : $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln p}{p^\alpha} \underset{\alpha \rightarrow 1}{\underset{\alpha > 1}{=}} \frac{1}{\alpha - 1} + O(1)$.

■ Théorème de Fubini

19 **SF 2 SF 4** Justifier l'existence et calculer : $\sum_{p,q \geq 2} \frac{(-1)^p}{q^p}$.

20 **SF 2 SF 4 SF 7** Soit $z \in \mathbb{C}$. Etudier la sommabilité et, le cas échéant, calculer la somme de :

a) $\left(\frac{z^p}{q!}\right)_{p,q \in \mathbb{N}}$ b) $\left(\frac{q^p z^p}{p!q!}\right)_{p,q \in \mathbb{N}}$ c) $\left(\binom{p+q}{p} z^{p+q}\right)_{p,q \in \mathbb{N}}$ d) $\left(\binom{p+q}{p} z^p\right)_{p,q \in \mathbb{N}}$

21 **SF 2 SF 4** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| < 1$.

1. On considérant la famille $(z^{p(2q-1)})_{p,q \geq 1}$ établir :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^{2p-1}}{1-z^{2p-1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{1-z^{2p}}$$

2. Etablir : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p z^{p+1}}{1-z^{p+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{1+z^p}$.

22 **SF 2 SF 4** Etablir : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}(2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\text{sh}(2n+1)}$.

23 **SF 4** On admet : $\forall x \in]-1, 1[$, $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.

On pose : $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$ (constante d'Euler).

a) Montrer que : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)-1}{n} = 1 - \gamma$

b) Montrer que : $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} = \gamma$

24 **SF 1 SF 4** Soit $\alpha > 1$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (v_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, positives. Pour tout $\lambda > 0$, on pose :

$$A_\lambda = \{n \in \mathbb{Z} \mid u_n > \lambda\} \quad \text{et} \quad B_\lambda = \{n \in \mathbb{Z} \mid v_n > \lambda\}$$

et on suppose que : $|B_\lambda| \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \mathbb{1}_{A_\lambda}(n)$.

Montrer que si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n^\alpha < +\infty$ alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n^\alpha < +\infty$.

25 **SF 4** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *partition multiplicative* de n toute liste $(d_1, \dots, d_r)$ d'entiers tels que $1 < d_1 \leq \dots \leq d_r$ pour laquelle $d_1 \dots d_r = n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre de partitions multiplicatives de n .

1. Montrer que pour tout $s > 1$:

$$\frac{u_n}{n^s} = \sum_{\substack{\alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N} \\ 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} \dots n^{\alpha_n} = n}} \frac{1}{2^{s\alpha_2} 3^{s\alpha_3} \dots n^{s\alpha_n}}$$

2. En déduire que pour tout $s > 1$: $u_n = O(n^s)$.

■ Avec des décompositions en éléments simples

26 **SF 4** Montrer que : $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \zeta(2)$.

27 **SF 7 SF 6** Montrer que : $\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{pq(p+q+1)} = 2$.

28 **SF 6 SF 2** Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$.

Montrer que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z(z+1)\dots(z+n)} = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$.

■ Produit de Cauchy

29 **SF 9** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $w_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{6^k}{k!}$.

Montrer que la série $\sum w_n$ converge et calculer sa somme.

30 **SF 9** Soient $a, b \in \mathbb{C}$ distincts tels que : $|a| < 1$ et $|b| < 1$.

Etablir : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = \frac{1}{1 - (a+b) + ab}$.

31 **SF 8** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que la série

$\sum \binom{n+p}{p} z^n$ converge absolument pour tout $p \in \mathbb{N}$ et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n = \frac{1}{(1-z)^{p+1}}$$

32 On suppose $\sum a_n$ absolument convergente et $\sum b_n$ convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Montrer

que $\sum c_n$ est convergente et que : $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$.