

1

2 Calculer $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}(x)$ pour $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$ en distinguant deux cas :

- $x = \sigma(a_i)$ pour un certain $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$
- $x \notin \{\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_p)\}$

3

1. Il suffit de le montrer pour une transposition. Essayer d'écrire (i, j) sous la forme : $(i, j) = (1, \bullet) \circ (1, \bullet) \circ (1, \bullet)$
2. Au vu du résultat de la question 1, il suffit de le montrer pour une transposition de la forme $(1, i)$.

4

1. A_n est le noyau d'un morphisme de groupe.

- a) Calculer $\varphi \circ \varphi$.
- b) Observer que $\varphi(A_n) = S_n \setminus A_n$.

5

Si σ commute avec toutes les permutations de S_n , alors elle commute avec toute transposition (i, j) . Combiner ce constat avec l'égalité $\sigma \circ (i, j) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i), \sigma(j))$ pour montrer que $\sigma(i) = i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

6

Montrer qu'un tel morphisme est constant sur l'ensemble des transpositions.

7

1. Si $\tau = (i, j)$, alors f_τ est la symétrie orthogonale par rapport à $\{e_i - e_j\}^\perp$.
2. L'intersection des invariants des symétries associées aux p transpositions est incluse dans l'ensemble des invariants de f_σ et $\text{Ker}(f_\sigma - \text{Id}_E)$ est une droite vectorielle.
3. Le minimum cherché est $n - 1$.

8

1. a) Puisque σ suit la loi uniforme sur S_n :

$$P(A_i) = \frac{\overbrace{\text{nombre de permutations } s \in S_n \text{ telles que } s(i) = i}^a}{\text{nombre total de permutations de } S_n} = \frac{a}{n!}$$

$$\text{Réponse à trouver : } P(A_i) = \frac{1}{n}.$$

De même : $P(A_i \cap A_j) = \frac{b}{n}$ où b est le nombre de permutations s telles que $s(i) = i$ et $s(j) = j$.

$$\text{Réponse à trouver : } P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{n(n-1)}.$$

b) $X_i = \mathbb{1}_{A_i}$ et $X_i X_j = \mathbb{1}_{A_i \cap A_j}$ et on sait que $\mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(p)$ où $p = P(A)$.

c) Utiliser $\text{cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$ puis $E(X_i X_j)$, $E(X_i)$ et $E(X_j)$ sont connues avec 1b).

$$\text{Réponse à trouver : } \text{cov}(X_i X_j) = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

2. a) N compte le nombre de points fixes : on sait exprimer une telle variable en fonction des indicatrices.

- b) • Pour l'espérance. Utiliser la linéarité de l'espérance.
- Pour la variance. Les X_i ne sont pas indépendantes donc on doit utiliser :

$$V(N) = \left(\sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j) \right)$$

$$\text{Réponse à trouver : } V(N) = 1$$

c) Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à N .

9

N étant défini comme un maximum, l'événement $\{N \geq k\}$

10

1. Puisque σ suit la loi uniforme sur S_n : $P(X = k) = \frac{|A_k|}{|S_n|}$ où A_k est l'ensemble des permutations $s \in S_n$ de la forme :

$$s = \underbrace{(x_1, \dots, x_k)}_{\text{tous distincts}} \circ \underbrace{\sigma'}_{\text{permutation de } \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{x_1, \dots, x_k\}}$$

Pour dénombrer A_k , former une permutations $s \in A_k$ revient à :

- Choisir une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à k éléments (le support du cycle de longueur k)
- Puis former un cycle $(x_1, \dots, x_k)$ de longueur k avec ces k -éléments
- Puis choisir une permutation σ' de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ (elle ne peut comporter de cycle de longueur supérieure à k puisque $k > n + 2$)

2. $p_n = P(X \leq \frac{n}{2}) = 1 - P(X > \frac{n}{2})$.

Avec le résultat de 1. on obtient : $p_n = 1 - H_n + H_{\lfloor n/2 \rfloor}$.

11

En notant A_k l'événement « $\sigma(k) > \sigma(k+1)$ » : $D = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{1}_{A_k}$.

a) $E(D) = \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k)$. Puisque σ suit la loi uniforme sur S_n :

$$P(A_k) = \frac{a}{n!} \text{ où } a \text{ est le nombre de permutations } s \text{ telles que } s(k) > s(k+1).$$

$$\text{On trouve } a = \binom{n}{2}(n-2)! \text{ puis } P(A_k) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{b) } V(D) = \sum_{k=1}^{n-1} V(\mathbb{1}_{A_k}) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \text{cov}(\mathbb{1}_{A_i}, \mathbb{1}_{A_j}).$$

• $V(\mathbb{1}_{A_k})$ se calcule en notant que $\mathbb{1}_{A_k} \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$

• $\text{cov}(\mathbb{1}_{A_i}, \mathbb{1}_{A_j}) = P(A_i \cap A_j) - P(A_i)P(A_j)$.

Comme à la question précédente $P(A_i \cap A_j)$ se calcule en dénombrant les permutations qui possèdent une descente en i et en j :

- Si $j = i + 1$ il y en a $\binom{n}{3}(n-3)!$
- Si $j > i + 1$ il y en a $\binom{n}{4}(n-4)!$

$$\text{On obtient : } \text{cov}(\mathbb{1}_{A_i}, \mathbb{1}_{A_j}) = \begin{cases} -\frac{1}{12} & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{si } j > i + 1 \end{cases}$$

12

Puisque σ suit la loi uniforme sur S_n : $P(X = k) = \frac{|A_k|}{|S_n|}$ où

est plus simple que $\{N = k\}$.

Utiliser $P(N = k) = P(N \geq k) - P(N \geq k + 1)$.

Ensuite remarquer que pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\{N \geq k\} = \{\sigma(1) < \dots < \sigma(k)\}$$

Puisque σ suit la loi uniforme sur S_n : $P(N \geq k) = \frac{|A_k|}{|S_n|}$

où A_k est l'ensemble des permutations $s \in S_n$ telles que $s(1) < \dots < s(k)$. Pour dénombrer A_k , former une permutations $s \in A_k$ revient à :

- Choisir dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ k valeurs $s(1), \dots, s(k)$ rangées par ordre strictement croissant.
- Puis choisir les valeurs de $s(k+1), \dots, s(n)$

$$\text{Réponse à trouver : } P(N \geq k) = \frac{1}{k!}.$$

A_k est l'ensemble des permutations $s \in S_n$ de la forme :

$$s = \underbrace{(1, x_1, \dots, x_{k-1})}_{\text{tous distincts}} \circ \underbrace{\sigma'}_{\text{permutation de } \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{1, x_1, \dots, x_{k-1}\}}$$

Pour dénombrer A_k , former une permutations $s \in A_k$ revient à :

- Choisir $x_1 \in \llbracket 2, n \rrbracket$.
- Puis choisir $x_2 \in \llbracket 2, n \rrbracket \setminus \{x_1\}$
- ...
- Puis choisir $x_k \in \llbracket 2, n \rrbracket \setminus \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$
- Puis choisir une permutation σ' de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{1, x_1, \dots, x_{k-1}\}$

- 13** 1. Remarquer que $\mathbb{1}_{\{X_1=k\}} + \dots + \mathbb{1}_{\{X_n=k\}} = kN_k$

Réponse : $E(N_k) = \frac{1}{k}$.

2. Remarquer que $C = N_1 + \dots + N_n$

Réponse : $E(C) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$.

- 14** On peut procéder par récurrence sur n . Pour l'hérédité on peut écrire $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \circ (n+1, X_{n+1})$ en regardant Σ_n comme une permutation aléatoire de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ qui fixe $n+1$. Il s'agit de montrer :

$$\forall \sigma \in S_{n+1}, \quad P(\Sigma_{n+1} = \sigma) = \frac{1}{(n+1)!}$$

Etant donnée $\sigma \in S_{n+1}$, en utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{X_{n+1} = k\}_{1 \leq k \leq n+1}$ et l'indépendance des X_i :

$$P(\Sigma_{n+1} = \sigma) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n P(\Sigma_n = \sigma \circ (n+1, k))$$

Noter alors que dans la somme :

- Si $\sigma(k) \neq n+1$ alors la permutation $\sigma' = \sigma \circ (n+1, k)$ ne fixe pas le point k donc $\{\Sigma_n = \sigma'\}$ est impossible.
- Si $\sigma(k) = n+1$ alors la permutation $\sigma' = \sigma \circ (n+1, k)$ fixe $n+1$ et peut-être considérée comme un élément de S_n

La somme se réduit au seul terme d'indice $k = \sigma^{-1}(n+1)$ qui vaut $\frac{1}{n!}$.

- 15** 1. Deux possibilités.

- Option 1 – Par le calcul des coefficients du produits. En notant $P_\sigma = (a_{i,j})$ et $P_{\sigma'} = (b_{i,j})$ la définition du produit

$$\text{donne } (P_\sigma P_{\sigma'})_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}.$$

Avec la définition des $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$, constater que la somme est nulle sauf si $a_{i,k}$ et $b_{k,j}$ valent 1 pour le même indice k ce qui est le cas si et seulement si $k = \sigma'(\sigma(i))$.

- Option 2 – Par les endomorphismes canoniquement associés. L'endomorphisme f_σ canoniquement associé à une permutation quelconque $\sigma \in S_n$ est caractérisé par $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Il suffit alors de comparer $f_\sigma \circ f_{\sigma'}(e_i)$ et $f_{\sigma \circ \sigma'}(e_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

2. Commencer par montrer que dans le cas d'une transposition $\tau = (k, \ell) : \det(P_\tau) = -1$. Pour cela remarquer que la matrice P_τ est très simple.

Utiliser ensuite le fait que toute permutation σ est une composée de transposition et le résultat de la question 1.

- 16** 1. Noter que : $T^2 = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) P_\sigma T$

Ensuite, pour $\sigma \in S_n$ fixée, calculer le produit : $\varepsilon(\sigma) P_\sigma T = \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma') P_\sigma P_{\sigma'} = \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma \circ \sigma') P_{\sigma \circ \sigma'}$ en ré-indexant la somme via « $s = \sigma \circ \sigma'$ ».

2. Noter que $\text{tr}(P_\sigma)$ est le nombre de points fixes de σ :

$$\text{tr}(P_\sigma) = \text{CardInv}(\sigma) = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\text{Inv}(\sigma)}(k)$$

En intervertissant les sommes on obtient

$$\text{tr}(T) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(k)=k}} \varepsilon(\sigma)$$

Ensuite, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé, se donner $\sigma \in S_n$ telle que $\sigma(k) = k$ revient à se donner sa restriction s à $\llbracket 1, n-1 \rrbracket \setminus \{k\}$, et $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(s)$.

$$\text{Par conséquent : } \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(k)=k}} \varepsilon(\sigma) = \sum_{s \in S_{n-1}} \varepsilon(s).$$

Remarquer alors que cette dernière somme est nulle car les permutations de signatures $+1$ et -1 sont en même nombre (exercice 4).

Conclure en observant que $A = \frac{1}{n!} T$ est un projecteur de trace nulle et en utilisant le lien entre la trace et le rang pour les projecteurs.