

■ Décompositions d'une permutation

1 **SF 1** Dans chaque cas, écrire la permutation σ comme une composée de cycles disjoints et calculer sa signature.

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\sigma = (1, 3, 4) \circ (2, 4, 3, 1) \circ (2, 3)$ (dans S_4)

2 Soit $n \geq 2$ et $a_1, \dots, a_p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, distincts ($p \geq 2$). On pose $c = (a_1, \dots, a_p)$. Pour toute $\sigma \in S_n$ exprimer $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ comme un p -cycle à expliciter.

3 **SF 2** Soit $n \geq 2$. Montrer que toute permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ peut s'écrire comme une composée :

1. de transpositions de la forme $(1, i)$ avec $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$.
2. de transpositions de la forme $(i, i+1)$ avec $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

4 Soit $n \geq 2$. Une permutation $\sigma \in S_n$ est dite *paire* si $\varepsilon(\sigma) = 1$. On note A_n l'ensemble des permutations paires de S_n .

1. Montrer que A_n est un sous-groupe de S_n .
2. a) Soit τ une transposition de S_n . Montrer que l'application $\varphi : \sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une bijection de S_n sur lui-même.
b) En déduire le cardinal de A_n .

5 **SF 2** Soit $n \geq 3$. Montrer que Id est la seule permutation qui commute avec tous les éléments de S_n .

6 **SF 2** Soit $n \geq 2$. Trouver tous les morphismes de groupes de S_n dans $\mathbb{C}^*$.

7 Soit $n \geq 1$ et E un espace euclidien de dimension n muni d'une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$.

Pour toute permutation $\sigma \in S_n$, on note f_σ l'endomorphisme de E défini par $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Soit τ une transposition de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que f_τ est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.
2. On pose $\sigma = (1, \dots, n)$. On suppose que σ est la composée de p transpositions. Montrer que $p \geq n-1$.
3. En déduire le cardinal minimal d'une famille $\mathcal{F}$ de transpositions telle que toute permutation de S_n est une composée d'éléments de $\mathcal{F}$.

■ Permutations et probabilités

8 **SF 3** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et σ une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble S_n des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i la variable indicatrice de l'événement $A_i = \{\sigma(i) = i\}$. On note N le nombre de points fixes de σ .

1. Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts.
 - a) Calculer $P(A_i)$ et $P(A_i \cap A_j)$
 - b) En déduire la loi de X_i et $X_i X_j$
 - c) Calculer $\text{cov}(X_i, X_j)$
2. a) Exprimer N en fonction de $X_1, \dots, X_n$ et en déduire $E(N)$ et $V(N)$.
b) Montrer que : $P(N \geq 4) \leq \frac{1}{9}$.

9 **SF 3** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et σ une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble S_n des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note N le plus grand entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$. Déterminer la loi de N .

10 **SF 3** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et σ une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble S_n des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note X la longueur du plus grand cycle apparaissant dans la décomposition de σ en cycles disjoints.

1. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $k > \frac{n}{2}$. Montrer que $P(X = k) = \frac{1}{k}$.
2. On note p_n la probabilité que σ n'ait aucun cycle de longueur strictement supérieure à $\frac{n}{2}$ dans sa décomposition en cycles disjoints. Montrer que $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \ln 2$.

11 **SF 3** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et σ une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble S_n des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ on dit que D possède une *descente* en k lorsque $\sigma(k) > \sigma(k+1)$. On note D le nombre de descentes de σ . Montrer que : a) $E(D) = \frac{n-1}{2}$. b) $V(D) = \frac{n+1}{12}$.

12 **SF 3** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et σ une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble S_n des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note X la longueur du cycle dans lequel 1 apparaît dans la décomposition de σ en cycles disjoints. Montrer que $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

13 **SF 3** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et σ une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble S_n des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note N_k le nombre de cycles de longueur k apparaissant dans la décomposition de σ en cycles disjoints (en comptant les points fixes comme des cycles de longueur 1) et on note C le nombre total de cycles de σ .

1. Calculer $E(N_k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Indication : on pourra librement utiliser le fait que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la variable aléatoire X_i qui donne la longueur du cycle dans lequel i apparaît dans la décomposition de σ suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ (voir exercice précédent)
2. En déduire un équivalent de $E(C)$ lorsque n tend vers $+\infty$

14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, et telles que $X_i \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, i \rrbracket)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On pose : $\Sigma_n = (1, X_1) \circ (2, X_2) \circ \dots \circ (n, X_n)$. Montrer que $\Sigma_n \sim \mathcal{U}(S_n)$.

■ Matrices de permutations

15 **SF 2** **SF 4** Soit $n \geq 2$. A toute $\sigma \in S_n$ on associe la *matrice de permutation* $P_\sigma = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients définis

$$\text{pour tous } i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ par } a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que pour toutes $\sigma, \sigma' \in S_n$: $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$
2. Montrer que : $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ pour toute $\sigma \in S_n$.

16 **SF 2** **SF 4** Soit $n \geq 3$. Pour toute permutation $\sigma \in S_n$ on définit la *matrice de permutation* P_σ comme à l'exercice 15. On pose : $T = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) P_\sigma$.

1. Démontrer que : $T^2 = n!T$.
2. Calculer $\text{tr}(T)$ puis montrer que $T = 0$.