

1 Concernant la séparation, pour pouvoir dire que f est nulle sur $[-1, 1]$ il y a un théorème à appliquer.

2 Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$:

$$\left(\int_0^1 gh\right)^2 \leq \int_0^1 g^2 \times \int_0^1 h^2$$

en choisissant judicieusement les fonctions g et h .

3 Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\left(\sum_{k=0}^n x_k y_k\right)^2 \leq \sum_{k=0}^n x_k^2 \times \sum_{k=0}^n y_k^2$$

en choisissant judicieusement les réels x_k et y_k .

4 Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$

5 Les hypothèses sur f permettent d'écrire : $f(t) = \int_0^t f'(s) ds$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $f^2(t) \leq t \int_0^1 f'^2$.

On conclut par croissance de l'intégrale.

6 Le cas $k = 1$ peut se montrer à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour le cas général, montrer par récurrence que

$$\text{tr}(M_1 \dots M_{2k}) \leq \left(\prod_{i=1}^{2k} \text{tr}(M_i^T M_i)^{2^{k-1}} \right)^{\frac{1}{2k}}$$

pour toutes matrices symétriques $M_1, \dots, M_{2k}$

7 1. Par bilinéarité : $\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j (e_i | e_j)$

En appliquant judicieusement l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{n^2}$ (pour majorer les sommes-doubles)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j (e_i | e_j) \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{=\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 s_i\right)^{1/2}} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{=\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 s_j\right)^{1/2}}$$

2. a) Ecrire $\sum_{k=1}^n \lambda_k (x | e_k)$ sous la forme $(x | \bullet)$

Appliquer ensuite l'inégalité de Cauchy Schwarz avec le produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ puis la question 1..

b) Prendre $\lambda_k = \frac{(x|e_k)}{s_k}$ dans **2a)**.

8 Par bilinéarité : $N = \left\| \sum_{i=1}^n X_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j (e_i | e_j)$

Utiliser ensuite la linéarité de l'espérance puis calculer $E(X_i X_j)$ en distinguant les indices $i \neq j$ et les indices $i = j$.

9 1. Appliquer $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x | e_k)^2$ avec $x = e_i$.

2. Il suffit de montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E (elle est déjà libre). Poser $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et montrer que $F^\perp = \{0\}$ puis justifier en quoi ceci assure que $F = E$.

10 a) Utiliser : $\|e_i - e_j\|^2 = \|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 - 2(e_i | e_j)$

b) La famille est de cardinal $n = \dim E$ donc la liberté suffit. Etant donnés $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0$, on

peut former un système de n équations en considérant les produits scalaires avec $e_1, \dots, e_n$ i.e. en écrivant

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad 0 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i | e_j \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{(e_i | e_j)}_{\substack{\frac{1}{2} \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j}}$$

En sommant les n équations on obtient $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$. En utilisant alors cette dernière égalité dans chaque équation on obtient $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$.

11 1. Développer $\|x\|^2$ et $\|y\|^2$ par bilinéarité

2. La question 1. assure que si $\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i e_i = 0$ alors $\sum_{i=1}^{p-1} |\lambda_i| e_i = 0$. Prendre le produit scalaire avec e_p .

12 • Si u et v sont orthogonaux utiliser l'égalité de Pythagore

• Pour la réciproque, deux possibilités (au moins) :

• *Option 1.* Par contraposition, supposant que $(u | v) \neq 0$, on peut trouver t tel que $\|u + tv\| < \|u\|$. Pour cela, chercher t tel que $u + tv \perp v$ puis utiliser l'égalité de Pythagore (si la projection sur un hyperplan a déjà été traitée en cours, il suffit de prendre t tel que $u + tv = p_H(u)$ où $H = \text{Vect}(v)^\perp$).

• *Option 2.* Supposer : $\forall t \in \mathbb{R}, \|u + tv\|^2 \geq \|u\|^2$. Développer avec l'identité remarquable, simplifier puis diviser l'inégalité par $t > 0$ ou par $t < 0$ puis faire enfin tendre t vers 0^+ et vers 0^- .

13 Si B est fini. Pour montrer que A est fini, étant donné une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\text{Vect}(A)$ il suffit de montrer que $A_i = \{(x | e_i), x \in A\}$ est fini pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour cela, décomposer e_i dans une base $(a_1, \dots, a_n)$ de $\text{Vect}(A)$ formée de vecteurs de A .

14 • $i) \Rightarrow ii)$ Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $a_{i,j} = (f(e_j) | e_i)$. SF 6

• $ii) \Rightarrow i)$ Le produit scalaire s'exprime matriciellement : si X est la colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et Y celle de y alors : $(f(x) | y) = (AX)^T Y$. Utiliser $ii)$ pour montrer que $(f(x) | y) = (x | f(y))$.

15 En notant $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ et en utilisant :

• Le fait que $a_{i,j}$ est la i^e coordonnée de b'_j dans $\mathcal{B}$

• Le formulaire donnant l'expression du produit scalaire en base orthonormée

on obtient : $(A^T A)_{i,j} = (b'_i | b'_j)$

16 1. Calculer $\|f(e_i)\|^2 - \|f(e_j)\|^2$ par identité remarquable.

2. Ecrire $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ puis exprimer $\|f(x)\|^2$.

17 1. Utiliser :

$$(f(x) | f(y)) = \frac{-1}{2} (\|f(x) - f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2)$$

2. a) Développer et utiliser 1.

b) Montrer que $(\delta | \delta) = 0$.

18 1. Introduire une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E .

Dans une telle base montrer que la matrice A de f a pour coefficients $a_{i,j} = (f(e_j) | e_i)$.

Ainsi l'hypothèse est : $0 = \text{tr} f = \sum_{i=1}^n (f(e_i) | e_i)$

- Si $n = 1$, c'est le résultat voulu
- Si $n \geq 2$, il existe $i \neq j$ tels que $(f(e_i) | e_i) \geq 0$ et $(f(e_j) | e_j) \leq 0$. On peut utiliser ces deux vecteurs pour construire un vecteur x tel que : $(f(x) | x) = 0$. Poser $x_t = (1-t)e_i + te_j$ pour tout $t \in [0, 1]$ de sorte que $x_0 = e_i$ et $x_1 = e_j$ et justifier que la fonction $\varphi : t \mapsto (f(x_t) | x_t)$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ s'annule.

2. Pour l'hérédité si le résultat est vrai en dimension n , en dimension $n+1$ utiliser la question 1 pour construire un vecteur e_1 de norme 1 tel que $(f(e_1) | e_1) = 0$. Compléter (e_1) avec une famille de n vecteurs $\mathcal{B}' = (e_2, \dots, e_n)$ en une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ de E . La matrice A de f dans cette base est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots \\ \vdots & A' \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \text{tr} A' = 0$$

Il suffit d'appliquer l'h.r. à f' tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'} f' = A'$

19 1. Utiliser : $0 = (f(x+y) | x+y)$.

2. Procéder par inclusion-dimension.

20 a) Fait en cours (partie II)

- b) Procéder par double inclusion.

- Fixer $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Montrer que $x \in (F+G)^\perp$ revient à montrer : $\forall z \in F+G, (x | z) = 0$
- Fixer $x \in (F+G)^\perp$. Il s'agit de montrer que $x \in F^\perp$ et que $x \in G^\perp$. Montrer que $x \in F^\perp$ revient à montrer : $\forall a \in F, (x | a) = 0$

- c) Appliquer b) à $F^\perp$ et $G^\perp$ puis utiliser a).

21 1. Symétrie, bilinéarité et positivité ne posent pas problème. Pour la séparation : il y a deux théorèmes à utiliser (l'un sur les intégrales, l'autre sur les polynômes).

2. Appliquer la méthode standard du savoir-faire **SF 7**

Pour $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$P \in (\mathbb{R}_1[X])^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} (P | 1) = 0 \\ (P | X) = 0 \end{cases}$$

Calculer ensuite les deux produits scalaires en fonction de a, b et c à l'aide de l'expression de $(P | Q)$ donnée par l'énoncé. On trouve

$$(\mathbb{R}_1[X])^\perp = \text{Vect}\left(-\frac{3}{2}X^2 + X\right) = \text{Vect}(-3X^2 + 2X)$$

3. $P_3 = -3X^2 + 2X$ est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathbb{R}_1[X]$. Il suffit de trouver une base orthogonale (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_1[X]$: (P_1, P_2, P_3) sera alors une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$. Construire (P_1, P_2) de « proche en proche » :
- Choisir arbitrairement $P_1 \in \mathbb{R}_1[X]$ non nul (et simple!)
 - Trouver ensuite $P_2 \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $0 = (P_1 | P_2)$.

22 1.

2. a) Utiliser la caractérisation de la multiplicité des racines des polynômes à l'aide des dérivées.

- b) Effectuer une succession d'intégration par parties en utilisant la question précédente pour le crochet.

3. Avec la **3b)**, montrer que $(P_k | P_i) = 0$ lorsque $0 \leq i < k \leq n$ (observer le degré de P_i).

4. Il suffit de prendre la famille des $\frac{P_k}{\|P_k\|}$ donc de calculer $\|P_k\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour cela, utiliser la **3a)** avec $Q = P_k$ en remarquant que $P_k^{(k)}$ est une constante. On obtient $\|P_k\|^2 = (-1)^k (2k)! \int_{-1}^1 (t-1)^k (t+1)^k dt$. On peut calculer l'intégrale en effectuant une succession d'intégration par parties.

$$\text{On obtient : } \|P\|_k^2 = \frac{(k!)^2}{2k+1} 2^{2k+1}.$$

23 Appliquer la méthode standard du savoir-faire **SF 7** :

- Ecrire F sous la forme $F = \text{Vect}(I_2, B)$ avec $B = \dots$
- Pour $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $M \in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} (M | I_2) = 0 \\ (M | B) = 0 \end{cases}$

24 1. Déjà fait en exercice dans le chapitre DIMENSION.

Fixer $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et montrer par analyse-synthèse qu'il

existe un unique couple (S, A) tel que $\begin{cases} S + A = M \\ S \in \mathcal{S}_n \\ A \in \mathcal{A}_n \end{cases}$

$$\text{On obtient } S = \frac{M + M^T}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{M - M^T}{2}$$

2. Raisonner par inclusion-dimension :

- Montrer que $\mathcal{S}_n \subset (\mathcal{A}_n)^\perp$. Pour cela fixer $S \in \mathcal{S}_n$. Il s'agit de montrer que $S \in (\mathcal{A}_n)^\perp$ i.e. que : $\forall A \in \mathcal{A}_n, (S | A) = 0$
- Montrer que $\dim \mathcal{A}_n = \dim((\mathcal{S}_n)^\perp)$

3. Utiliser : $A - S = \underbrace{(A - A_S)}_{\in \mathcal{A}_n = (\mathcal{S}_n)^\perp} + \underbrace{(A_S - S)}_{\in \mathcal{S}_n}$ et Pythagore.

25 • Ecrire F sous forme de Vect (résoudre l'équa diff), on trouve $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$ où $f_1 : t \mapsto e^t$ et $f_2 : t \mapsto e^{-t}$.

- Ensuite, pour toute $f \in E$: $f \in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} (f | f_1) = 0 \\ (f | f_2) = 0 \end{cases}$

On obtient : $(f | f_1) = ef(1) - f(0)$ et $(f | f_2) = -\frac{1}{e}f(1) + f(0)$
En résolvant le système : $f \in F^\perp \Leftrightarrow f(0) = f(1) = 0$.

26 Il suffit de montrer que $H^\perp \subset \{0\}$.

Fixer $g \in H^\perp$ et utiliser la fonction $f : t \mapsto tg(t)$.

27 Transformer $(1, X, X^2)$ en une famille orthonormée (P_0, P_1, P_2) par l'algorithme de Gram-Schmidt.

Réponses à trouver : $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{X-1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad (X^2 - 2X + \frac{1}{3})\sqrt{\frac{3}{2}}$

28 On note $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Il s'agit de calculer : $p_F(b_1), p_F(b_2)$ et $p_F(b_3)$.

- Méthode 1 On trouve une base orthonormée (e_1, e_2) de F puis on utilise :
(★) $p_F(u) = (u | e_1)e_1 + (u | e_2)e_2$ pour $u = b_1, b_2$ puis b_3 . Pour trouver (e_1, e_2) on construit d'abord une famille (u_1, u_2) orthogonale. On prend (par exemple) $u_1 = (1, 0, 1)$, qui appartient à F . On cherche ensuite $u_2 = (x, y, z)$ tel

que : $\begin{cases} u_2 \in F \\ (u_2 | u_1) = 0 \end{cases}$. Une base orthonormée de F est (e_1, e_2) où $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$ et $e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$

- **Méthode 2** On utilise le fait que F est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. On trouve un vecteur normal a à F puis
 $(\star\star) \quad p_F(u) = u - \frac{(u | a)}{\|a\|^2} a$ pour $u = b_1, b_2$ puis b_3 .

29 On peut ici appliquer les méthodes 1 et 3 de **SF 9** :

- Avec la méthode 1. Utiliser une formule de trigo pour écrire $\sin^2 = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in F^\perp$ d'où $p_F(u) = f$
- Avec la méthode 3. On trouve : $(f_1 | f_2) = 0$. La famille (f_1, f_2) est donc une base orthogonale de F . Une base orthonormée est (e_1, e_2) où $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$ et $e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|}$.
 Pour calculer $\|f_1\|$: $\|f_1\|^2 = (f_1 | f_1) = \int_0^{2\pi} f_1^2(t) dt$
 On trouve : $\|f_1\| = \|f_2\| = \pi$ donc $e_1 = \frac{f_1}{\sqrt{\pi}}$ et $e_2 = \frac{f_2}{\sqrt{\pi}}$.
 Muni d'une base orthonormée :
 $(\star) \quad p_F(u) = (u | e_1)e_1 + (u | e_2)e_2 = \frac{1}{\pi}(u | f_1)f_1 + \frac{1}{\pi}(u | f_2)f_2$
 Reste à calculer $(u | f_1)$ et $(u | f_2)$. Ce sont deux intégrales : la première est simple, linéariser pour la deuxième.

30 N.B. Il s'agit de la suite de l'exercice 23 dont on peut utiliser le résultat : $F^\perp = \text{Vect}(U, V)$ où $U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut ici appliquer les méthodes 1 et 3 de **SF 9** :

- Avec la méthode 1. On devine la décomposition selon $F \oplus F^\perp$.
- Avec la méthode 3. Montrer que la base (U, V) de $F^\perp$ est orthogonale. Une base orthonormée est (E_1, E_2) où $E_1 = \frac{U}{\|U\|}$ et $E_2 = \frac{V}{\|V\|}$. On trouve $\|U\| = \|V\| = \sqrt{2}$ donc
 $p_{F^\perp}(J) = (J | E_1)E_1 + (J | E_2)E_2 = \frac{1}{2}(J | U)U + \frac{1}{2}(J | V)V$
 Reste alors à calculer $(J | U)$ et $(J | V)$.

31 Les questions reposent sur les deux conditions :

- ① $p_F(x) \in F$ et ② $x - p_F(x) \in F^\perp$
1. Écrire $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ et utiliser le théorème de Pythagore pour calculer $\|x\|^2$.
2. Poser $G = \{x \in F \mid \|p_F(x)\| = \|x\|\}$ et montrer que $F = G$ par double-inclusion.
3. Exploiter les conditions ① et ②, par exemple
 $(p_F(x) | y) \underset{y=p_F(y)+(x-p_F(y))}{=} (p_F(x) | p_F(y)) + (p_F(x) | y - p_F(y))$

32 Introduire une base orthonormée $(b_1, \dots, b_k)$ de F . La formule donnant le projeté dans une base orthonormée puis celle y donnant la norme permettent d'écrire :

$$\|p_F(e_i)\|^2 = \sum_{j=1}^k (e_i | b_j)^2. \text{ Ceci exprime } \sum_{i=1}^n \|p_F(e_i)\|^2 \text{ comme une somme-double. Intervertir les } \sum \text{ et noter que la somme intérieure vaut } \|b_j\|^2$$

33 1. Si $y = f(x) - x$ est un élément de $F \cap G$, alors pour tout

$$n \geq 1 : y = \frac{1}{n}(f^n(x) - x).$$

2. Prouver le résultat sur F et sur G suffit.

1. c'est à dire arriver à écrire $S(a, b)$ sous la forme $\|x - y\|$ pour un certain vecteur x d'un e.v. E à trouver et y qui décrit un certain sous-ev de E .

3. Commencer par montrer que $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$.

34

Rappel : produit scalaire matriciel

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, le produit scalaire se calcule simplement, si

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ et } A' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}, \begin{cases} (A | A') = aa' + bb' + cc' + dd' \\ \|A\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{cases}$$

Plusieurs méthodes sont possibles :

- $d(A, F) = \|A - p_F(A)\|$ donc il s'agit de déterminer $p_F(A)$. Ici la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ est une b.o.n de F donc :
 $p_F(A) = (A | E_{1,1})E_{1,1} + (A | E_{1,2})E_{1,2} + (A | E_{2,2})E_{2,2}$
 Le calcul des produits scalaires donne $p_F(A) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$
 Puis on forme $A - p_F(A) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ et on calcule $\|A - p_F(A)\|$.
- On peut procéder différemment pour déterminer $p_F(A)$ en devinant la décomposition de $A = M + N$ selon $F \oplus F^\perp$. Ensuite : $d(A, F) = \|A - p_F(A)\| = \|N\|$
- F est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $d(A, F) = \frac{|(A | E)|}{\|E\|}$ où E est un vecteur normal à F .
 Il s'agit donc d'abord de trouver un tel vecteur normal i.e. une matrice E orthogonale à toutes les matrices triangulaires supérieures. Ensuite on calcule $(A | E)$ et $\|E\|$.

35

Par définition $d(M, \mathcal{S}) = \|M - p_{\mathcal{S}}(M)\|$.

Il s'agit donc de déterminer $p_{\mathcal{S}}(M)$. Ici on peut utiliser la méthode 1 car on connaît la décomposition d'une matrice dans $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^\perp$ c'est : $M = \underbrace{\frac{M + M^T}{2}}_{S \in \mathcal{S}} + \underbrace{\frac{M - M^T}{2}}_{A \in \mathcal{S}^\perp}$
 Cette décomposition assure (sans calcul) que $p_{\mathcal{S}}(M) = S$ et :
 $d(M, \mathcal{S}) = \|M - S\| = \|A\|$. Il suffit donc de calculer $\|A\|$.

36

Calcul des produits scalaires

Dans cet exercice $(P | Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ et $\|P\|^2 = (P | P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2$

On a : $d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \|X^2 - P\|$, où $P = p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)$.

• Calcul du projeté orthogonal de X^2 sur $F = \mathbb{R}_1[X]$.

Utiliser la méthode 2 du savoir-faire **SF 9**

- $P = p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) \in \mathbb{R}_1[X]$ donc il s'écrit : $P = aX + b$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$ à trouver
- $X^2 - P \in (\mathbb{R}_1[X])^\perp$ donc P vérifie :

$$\begin{cases} (X^2 - P | 1) = 0 \\ (X^2 - P | X) = 0 \end{cases} \text{ i.e. : } (\star) \begin{cases} (P | 1) = (X^2 | 1) \\ (P | X) = (X^2 | X) \end{cases}$$

 Le calcul des quatre produits scalaire donne un système de deux équations sur a et b .
- Calcul de la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$. Calculer le polynôme $Q = X^2 - P$ puis $d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \|X^2 - P\| = \|Q\|$

37

Il s'agit d'interpréter le problème comme un problème de distance¹. Concrètement il y a trois choses à faire :

- Définir l'espace vectoriel en jeu : l'énoncé propose $E = \mathbb{R}_n[X]$.

- Définir un produit scalaire sur E pour lequel $S(a, b)$ s'écrira comme une norme. On peut prendre $(P | Q) = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$ de sorte que $\|P - Q\|^2 = \sum_{k=0}^n (P(k) - Q(k))^2$.
- Définir le sev F sur lequel on projette. Avec les définitions précédentes $S(a, b) = \|X^2 - \underbrace{(aX + b)}_{\text{décrit } \mathbb{R}_1[X]}\|^2$

Donc on prend $F = \mathbb{R}_1[X]$.

Par le théorème d'approximation, $S(a, b) = \|X^2 - (aX + b)\|^2$ est minimale pour $aX + b = p_F(X^2)$.

Utiliser la méthode 2 du savoir-faire **SF 9** pour calculer $p_F(X^2)$ On trouve $a = n$ et $b = \frac{-n(n-1)}{6}$.

38 Il s'agit d'interpréter le problème comme un problème de distance Concrètement il y a trois choses à faire :

- Définir l'espace vectoriel en jeu : ici l'énoncé propose $E = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$.
- Définir un produit scalaire sur E pour lequel $I(a, b)$ s'écrira comme une norme. Ici on prend le produit scalaire intégral $(f | g) = \int_0^{2\pi} fg$ de sorte que $\|f - g\|^2 = \int_0^{2\pi} (f - g)^2$.
- Définir le sev F sur lequel on projette. En notant f la fonction $t \mapsto t$ et f_1 la fonction $t \mapsto \sin t$ et $f_2 : t \mapsto \cos t$
 $I(a, b) = \|f - \underbrace{(af_1 + bf_2)}_{\text{décrit Vect}(f_1, f_2)}\|^2$

Donc on prend $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$.

Par le théorème d'approximation $I(a, b) = \|f - (a \sin + b \cos)\|^2$ est minimale lorsque $a \sin + b \cos = p_F(f)$. Calculer $p_F(f)$ avec la méthode 3 de **SF 9** : on trouve $a = -2$ et $b = 0$.

39

Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Ici : $(A | B) = \text{tr}(A^T B)$ et $\|A\|^2 = \text{tr}(A^T A)$

H est le noyau de la forme linéaire $M \mapsto \text{tr} M$.

Un vecteur normal se devine sur l'équation de H en écrivant : $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid (\bullet | M) = 0\} =$

Utiliser la formule : $d(J, H) = \frac{|(J | \bullet)|}{\|\bullet\|}$

Réponse à trouver : $d(J, H) = \sqrt{n}$.

40 a) $\|A - \lambda I_n\|$ lorsque $\lambda I_n = p_F(A)$ où $F = \text{Vect}(I_n)$.

Il s'agit de calculer le projeté de A sur F .

On peut utiliser la méthode 2 :

- $p_F(A) = \lambda I_n \in F$ a déjà été traduit.
- $(A - \lambda I_n | I_n) = 0$ donne avec la linéarité du produit scalaire : $\lambda = \frac{(A | I_n)}{(I_n | I_n)}$ qui donne le résultat demandé en calculant les deux produits scalaires.

b) Il s'agit de calculer $\|A - \lambda I_n\|^2$.

Pour cela on peut utiliser la ruse usuelle :

$$\|A - \lambda I_n\|^2 = (A - \lambda I_n | A - \lambda I_n) = (A - \lambda I_n | A) - \underbrace{(A - \lambda I_n | \lambda I_n)}_{=?}$$