

■ Produit scalaire

- 1** **SF 1** Montrer que la relation $(f | g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t^2)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$

■ Inégalité de Cauchy-Schwarz

- 2** **SF 4** Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}_+)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$. Montrer : $\forall n, p \in \mathbb{N}, I_{n+p}^2 \leq I_{2n} I_{2p}$

- 3** **SF 4** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} \leq \sqrt{2^{n+1}}$.

- 4** **SF 4** Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Montrer : $\frac{f(b)^2 - f(a)^2}{2} \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \times \sqrt{\int_a^b f'(t)^2 dt}$

- 5** **SF 4** Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$.
Montrer : $\int_0^1 f(t)^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'(t)^2 dt$.

- 6** **SF 4** Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétriques et $k \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que : $\text{tr}((AB)^{2k}) \leq \text{tr}((A^2 B^2)^{2k-1})$.

■ Calculs avec les produits scalaires

- 7** **SF 2** **SF 4** Soit E un espace préhilbertien $x \in E$ et $e_1, \dots, e_n \in E$, non nuls. On pose $s_k = \sum_{i=1}^n |(e_k | e_i)|$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

1. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Montrer : $\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 s_k$

Indication : Appliquer l'inégalité de Cauchy Schwarz dans $\mathbb{R}^{n^2}$.

2. a) En déduire que pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k (x | e_k) \leq \|x\| \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 s_k \right)^{1/2}$$

- b) En déduire : $\sum_{k=1}^n \frac{(x | e_k)^2}{s_k} \leq \|x\|^2$

- 8** **SF 2** Soit E un espace préhilbertien et $e_1, \dots, e_n \in E$, unitaires. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de même loi définie pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ par : $P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$.

On pose : $N = \left\| \sum_{i=1}^n X_i e_i \right\|^2$. Montrer que : $E(N) = n$.

- 9** **SF 5** Soit E un espace préhilbertien et $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs unitaires de E vérifiant : $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x | e_k)^2$
- Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée.
 - Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E . Attention au départ rien n'indique que n est la dimension de E .

- 10** **SF 3** Soit $n \geq 2$. Soit E un espace euclidien de dimension n et $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs unitaires de E . On suppose que pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$: $\|e_i - e_j\| = 1$.

- Montrer que $(e_i | e_j) = \frac{1}{2}$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts
- Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

- 11** **SF 2** Soit E un espace euclidien et $e_1, \dots, e_p \in E$ vérifiant, pour tous $i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tels que $i \neq j$: $(e_i | e_j) < 0$.

- Soient $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$. On pose $x = \sum_{k=1}^p x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^p |x_k| e_k$. Montrer que : $\|y\| \leq \|x\|$.
- Montrer que $(e_1, \dots, e_{p-1})$ est libre. Que peut-on en déduire sur la dimension de E ?

- 12** **SF 3** Montrer que deux vecteurs u et v d'un espace préhilbertien E sont orthogonaux ssi : $\forall t \in \mathbb{R}, \|u\| \leq \|u + tv\|$.

- 13** **SF 6** Soit A une partie d'un espace euclidien E . On pose : $B = \{(x | y), x, y \in A\}$. Montrer que A est fini si et seulement si B l'est.

■ Endomorphismes et produits scalaires

- 14** **SF 6** Soient E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose : $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$. Montrer l'équivalence entre :
- $\forall x, y \in E, (f(x) | y) = (x | f(y))$
 - A est symétrique

- 15** **SF 6** Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E . On note A la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Montrer que : $A^{-1} = A^T$.

- 16** **SF 2** **SF 3** Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x, y \in E, (x | y) = 0 \implies (f(x) | f(y)) = 0$

- Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Montrer : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$
- En déduire qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $x \in E$: $\|f(x)\| = c \|x\|$.

- 17** **SF 3** Soit E un espace euclidien et $f : E \rightarrow E$ telle que : $f(0_E) = 0_E$ et $\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$

- Montrer que f conserve le produit scalaire i.e. : $\forall x, y \in E, (f(x) | f(y)) = (x | y)$

2. a) Soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On pose $\delta = f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)$. Montrer que pour tout $z \in E$: $(\delta | f(z)) = 0$.

- b) En déduire que f est linéaire.

- 18** **SF 6** Soit E un espace euclidien de dimension n et f un endomorphisme de E tel que $\text{tr}(f) = 0$.

- Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $(f(x) | x) = 0$.
- En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f à tous ses éléments diagonaux nuls. Indication : Procéder par récurrence sur n .

- 19** **SF 8** Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, (f(x) | x) = 0$

- Etablir : $\forall x, y \in E, (f(x) | y) = -(x | f(y))$.
- Montrer que $\text{Im } f = (\text{Ker } f)^\perp$.

■ Orthogonal d'un sous-espace

- 20** Ex. 77, banque INP **SF 8** Soient F et G deux sous-espaces vectoriel d'un espace euclidien E .

- Montrer que : $(F^\perp)^\perp = F$.
- Démontrer : $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
- En déduire que : $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

21 **SF 1 SF 5 SF 7** Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose

$$(P | Q) = P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(t)Q'(t)(1-t)dt$$

1. Montrer que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base de $\mathbb{R}_1[X]^\perp$.
3. Déterminer une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire. Comment obtenir une base orthonormale?

22 **SF 1 SF 5** Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A_k = (X^2 - 1)^k$ et $P_k = A_k^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

1. Démontrer que la relation : $(P | Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$.
 - a) Montrer : $\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, A_k^{(i)}(-1) = A_k^{(i)}(1) = 0$
 - b) Etablir : $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], (P_k | Q) = (-1)^k \int_{-1}^1 A_k(t)Q^{(k)}(t)dt$.
3. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est orthogonale.
4. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

23 **Ex. 81.1, banque INP SF 7** Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$ on pose : $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Déterminer une base de $F^\perp$.

24 **Ex. 92.2, banque INP SF 8** On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique.

1. Montrer que les sous-espaces $\mathcal{S}_n$ (matrices symétriques) et $\mathcal{A}_n$ (matrices antisymétriques) sont supplémentaires.
2. Montrer que $\mathcal{A}_n = (\mathcal{S}_n)^\perp$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $A_s = \frac{1}{2}(A + A^T)$. Montrer que pour toute $S \in \mathcal{S}_n$: $\|A - S\| \geq \|A - A_s\|$.

25 **SF 7** On munit $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par la relation : $(f | g) = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))dt$.

On pose : $F = \{f \in E \mid f'' = f\}$.
Démontrer que : $F^\perp = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$.

26 On pose $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et on munit E du produit scalaire défini par la relation : $(f | g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.
On pose $H = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Montrer que $H^\perp = \{0\}$.

■ Orthonormalisation de Schmidt

27 On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire défini par la relation $(P | Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$. Avec l'algorithme de Schmidt, orthonormaliser la base canonique $(1, X, X^2)$.

■ Projection orthogonale

28 **SF 9 SF 10** Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, on pose : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$. Déterminer la matrice de p_F dans la base canonique.

29 **Ex. 80, banque INP SF 9** On munit $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par la relation : $(f | g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$. On note F le sous-espace engendré par les deux fonctions $f_1 : x \mapsto \cos x$ et $f_2 : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de $u : x \mapsto \sin^2(x)$.

30 **Ex. 81.2, banque INP SF 9** On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$ et on pose : $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Trouver le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.

31 Soient E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et p_F le projecteur orthogonal sur F .

1. Montrer que pour tout $x \in E$: $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$.
2. Montrer que : $F = \{x \in E \mid \|p_F(x)\| = \|x\|\}$.
3. Montrer que pour tous $x, y \in E$, $(p_F(x) | y) = (x | p_F(y))$

32 **SF 6 SF 9** Soit E un espace euclidien de dimension n muni d'une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension k . Montrer que $\sum_{i=1}^n \|p_F(e_i)\|^2 = k$.

33 **SF 8** Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$: $\|f(x)\| \leq \|x\|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $g_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f^k$.

On pose enfin : $F = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $G = \text{Im}(f - \text{Id}_E)$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .
2. On note p le projecteur sur F et parallèlement à G . Montrer que pour tout $x \in E$: $\|g_n(x) - p(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
3. Montrer que $G = F^\perp$.

■ Distance à un sous-espace

34 **Ex. 82, banque INP SF 9 SF 11 SF 12** On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$ et on pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer la distance de A au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

35 **SF 9 SF 11** On munit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique et on pose : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer la distance de M au sous-espace vectoriel $\mathcal{S}$ des matrices symétriques.

36 **SF 9 SF 11** On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire $(P, Q) \mapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$. Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

37 **SF 9 SF 11** En introduisant un produit scalaire judicieux sur $\mathbb{R}_n[X]$, trouver les réels a, b qui rendent minimale la somme : $S(a, b) = \sum_{k=0}^n (k^2 - ak - b)^2$.
On pourra librement utiliser la formule : $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

38 **SF 9 SF 11** Trouver les réels a, b qui minimisent l'intégrale $I(a, b) = \int_0^{2\pi} (t - a \sin t - b \cos t)^2 dt$.
Indication : Interpréter $I(a, b)$ comme une distance sur $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

39 **SF 11** On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique et on pose $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$. Calculer la distance à H de la matrice J dont tous les coefficients valent 1

40 **SF 9 SF 11** On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\|A - \lambda I_n\|$ est minimale pour $\lambda = \frac{\text{tr}A}{n}$ et que ce minimum vaut : $\sqrt{\|A\|^2 - \frac{(\text{tr}A)^2}{n}}$.