

- 1 • On cherche :  $p_n = P(X = Y)$  où
- $X$  est le nombre de pile du premier joueur.
  - $Y$  est le nombre de pile du second joueur.
  - $X$  et  $Y$  sont indépendantes et suivent une loi usuelle
  - Calcul de  $P(X = Y)$

**Technique à retenir : on « gèle » la variable  $Y$**

- Très faux :  $P(X = Y) \neq \sum_{k=0}^n \binom{n}{Y} \left(\frac{1}{2}\right)^n$
  - Très faux aussi :  $P(X = Y) \neq \sum_{k=0}^n P(X = k)$  « parce que »  $Y$  est à valeurs dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$
  - La bonne écriture Appliquer la formule des probabilités totales pour « geler » la variable  $Y$
- $$P(X = Y) = \sum_{k=0}^n P_{\{Y=k\}}(X=Y)P(Y=k) = \sum_{k=0}^n P_{\{Y=k\}}(X=k)P(Y=k)$$
- Il reste à :
- Remplacer  $P(Y = k)$  qui est connue
  - Calculer  $P_{\{Y=k\}}(X = k)$  (utiliser l'indépendance)

• Equivalent de  $p_n$  : Utiliser la formule de Stirling.

- 2 Utiliser  $P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y)$   
Ensuite calculer  $P(X = Y)$  comme à l'exercice précédent en « gelant »  $Y$  (ou  $X$  peu importe) à l'aide de la formule des probabilités totales.

- 3 Noter  $A$  l'événement : «  $X_1 \times \dots \times X_n$  est pair »  
Le produit est pair si l'un des  $X_i$  l'est :  $A$  est une réunion mais elle n'est pas incompatible. Remarquer que  $\bar{A}$  peut s'écrire est l'événement : « Tous les  $X_i$  sont impairs. »  
comme une intersection indépendante à l'aide des événements  $I_i$  : «  $X_i$  est impair » pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$   
On peut donc calculer les  $P(I_i)$  puis  $P(\bar{A})$ .

- 4 1. Chercher les couples  $(x, y)$  d'entiers tels que  $M^2 = M$ .  
On trouve deux couples solutions :  $(0, 1)$  et  $(1, 0)$ .
2. On cherche  $P(A)$  où  $A$  est l'événement :  
«  $M$  représente un projecteur non nul »  
Avec la question 1 :  
 $M^2 = M$  ssi le couple  $(X, Y)$  vaut  $(0, 1)$  ou  $(1, 0)$ .  
Traduire cette équivalence comme une égalité d'événements :  $A = (\dots) \cup (\dots)$   
Il reste ensuite à calculer  $P(A)$ .

- 5 1. • Loi de  $R$ . Utiliser  $\text{rg} M = \text{rg}(C_1, \dots, C_n)$  où  $C_1, \dots, C_n$  sont les colonnes de la matrice. Les colonnes de  $M$  sont toutes proportionnelles à  $U$  :
- $C_i = X_i U$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$
  - donc  $\text{rg} M$  vaut 0 (si tous les  $X_i$  sont nuls) ou 1 (si au moins un des  $X_i$  n'est pas nul).
- Dit autrement,  $R$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . Reste à calculer  $P(R = 0)$ . Pour cela exprimer l'événement  $\{R = 0\}$  comme une intersection des  $\{X_i = 0\}$ .

1. Le max est plus petit que  $k$  ssi tous sont plus petits que  $k$
2. Le min est plus grand que  $k$  ssi tous sont plus grands que  $k$
3. le min vaut  $k$  s'il est plus grand que  $k$  mais pas plus grand que  $k + 1$

- Loi de  $S$ . Remarquer que  $S = \sum_{k=1}^n X_k^2$  : il s'agit d'une somme de  $n$  variables indépendantes, les  $X_k^2$ , qui suivent toutes une loi  $\mathcal{B}(p)$ . La loi de  $S$  est donc donnée par un théorème du cours.

2. On cherche  $P(A)$  où  $A$  : «  $M$  représente un projecteur »  
Ainsi on cherche  $P(M^2 = M)$ . Tout réside dans le calcul de  $M^2$ . Pour ce calcul noter que  $U^T \times U \in \mathbb{R}$  (matrice de taille  $(1, 1)$ ). On obtient :  $M^2 = SM$ .  
Ainsi :  $A = \{M^2 = M\} = \{S = 1\} \cup \{M = 0\}$ .

- 6 1. Partir de  $E(X) = \sum_{k=0}^N kP(X = k)$  puis utiliser

$$P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k)$$

2. a) Utiliser :  $\{M_n \leq k\} = \{X_1 \leq k\} \cap \dots \cap \{X_n \leq k\}$  (note 1)  
puis utiliser l'indépendance des  $X_i$ .

- b) Utiliser la question 1. et  $\{M_n > k\} = \overline{\{M_n \leq k\}}$ .

$$\text{Réponse : } E(M_n) = 6 - \left( \left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{6}\right)^n + \left(\frac{3}{6}\right)^n + \left(\frac{4}{6}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n \right)$$

- 7 a) Calculer  $P(M_n \geq k)$  d'abord en utilisant :

$$\{M_n \geq k\} = \{X_1 \geq k\} \cap \dots \cap \{X_n \geq k\}$$

(note 2) puis en déduire  $P(M_n = k)$  (note 3)

- b) Noter que :  $p_n = P(M_n = 1)$ .

$$\text{Réponse : } p_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

- 8 Attention : on ne peut pas écrire  $E(S_N) = \sum_{k=1}^N E(X_k)$  car ici  $N$  n'est pas un entier fixé mais une variable aléatoire.

Par définition de l'espérance :  $E(S_N) = \sum_{k \in S_N(\Omega)} kP(S_N = k)$

Calculer  $P(S_N = k)$  en « gelant » la variable  $N$  i.e. en appliquant la formule des probas totales avec le sce  $\{N = \ell\}_{0 \leq \ell \leq n}$ . Cela permet d'écrire  $E(S_N)$  comme une somme double.

En permutant les symboles  $\sum$ , constater que la somme intérieure est  $E(S_\ell) = \ell E(X_1)$ .

$$\text{Réponse : } E(S_N) = E(X_1)E(N).$$

Pour calculer  $V(S_N)$  :

- Utiliser  $V(S_N) = E(S_N^2) - E(S_N)^2$
- Par la formule de transfert  $E(S_N^2) = \sum_{k \in S_N(\Omega)} k^2 P(S_N = k)$
- Adapter le raisonnement qui a permis de calculer  $E(S_N)$  en utilisant notamment que  $E(S_\ell^2) = V(S_\ell) + E(S_\ell)^2$ .
- Réponse :  $V(S_N) = V(X_1)E(N) + E(X_1)^2 V(N)$

- 9 Supposer par l'absurde que c'est le cas. En notant  $X_1$  le numéro du premier dé et  $X_2$  le numéro du second, l'hypothèse assure que  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes, toutes deux à valeurs dans  $\llbracket 1, 6 \rrbracket$  et  $X_1 + X_2 \sim \mathcal{W}(\llbracket 2, 12 \rrbracket)$ .

En posant :  $p_i = P(X_1 = i)$ ,  $q_i = P(X_2 = i)$

$$\text{puis : } P = \sum_{i=1}^6 p_i X^{i-1} \quad \text{et} \quad Q = \sum_{i=1}^6 q_i X^{i-1}, \text{ observer que}$$

le fait que  $X_1 + X_2$  suive la loi  $\mathcal{W}(\llbracket 2, 12 \rrbracket)$  se traduit par

l'égalité polynomiale :  $PQ = \frac{1}{11} \sum_{k=0}^{10} X^k$ , polynôme dont on connaît les racines. Obtenir une contradiction en montrant que  $P$  (et  $Q$ ) possède une racine réelle (observer le degré).

**10** 1. Montrer que  $\{X \leq k\} \subset \{Y \leq k\}$ .

2. Le résultat de la question 1 ne s'applique pas directement (ici il n'est pas possible de comparer  $X$  et  $Y$ ). Construire  $X'$  et  $Y'$  comme des sommes de variables binomiales indépendantes. Étant données des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_{n+1}$  indépendantes sur un même espace probabilisé et toutes de lois  $\mathcal{B}(p)$ , poser  $X' = X_1 + \dots + X_n$  et  $Y' = X_1 + \dots + X_{n+1}$ . On peut appliquer 1. à  $X'$  et  $Y'$ .

**11** Montrer que la racine en question ne peut être que  $-1$ .

Réponse à trouver :  $p_d \underset{d \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi d}}$ .

**12** 1. Écrire  $S_p = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \mathbb{1}_{\{|X_i - X_j| \leq p\}}$ .

2. Montrer que  $S_2 \leq 3S_1$ .

**13** a)  $X_1$  suit une loi usuelle

b)  $V(X_1)$  et  $V(X_2)$  sont données par le cours. Calculer  $V(X_1 + X_2)$  en notant que  $X_1 + X_2 + X_3$  est connue

c) Utiliser  $\text{cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{2}(V(X_1 + X_2) - V(X_1) - V(X_2))$ .

**14** a) La variable  $Z = X - Y$  est à valeurs dans  $[-n, n]$ .

**Technique : on « gèle » la variable  $Y$**

Appliquer la formule des probabilités totales pour « geler » la variable  $Y$

$$P(Z = k) = P(X = Y + k) = \sum_{i=0}^n P_{Y=i}(X = i + k)P(Y = i)$$

Après quelques simplifications on obtient :

$$P(X = Y + k) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} P(X = k + i)$$

Pour calculer  $P(X = k + i)$  distinguer des cas :

- Si  $k \geq 0$  Alors  $P(X = k + i) = 0$  lorsque  $i > n - k$  donc arrêter la somme à  $n - k$
- Si  $k < 0$  Alors  $P(X = k + i) = 0$  lorsque  $i < -k$  donc démarrer la somme à  $-k$ .

On peut aussi éviter la disjonction de cas en remarquant que  $Z \sim -Z$  ce qui permet de ne traiter que le cas où  $k \geq 0$ .

**b)** Réponse à trouver :  $\text{cov}(X, X - Y) = \frac{n}{4}$

**15** 1.  $Y_i$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$  et

$$\{Y_i = 1\} = \{X_i = 1\} \cap \{X_{i+1} = 1\}$$

Réponse à trouver :  $Y_i \sim \mathcal{B}(p^2)$ .

L'espérance et la variance s'obtiennent sans calcul

2.  $Y_i Y_{i+1}$  suit elle aussi une loi de Bernoulli.

On a toujours  $\{Y_i Y_{i+1} = 1\} = \{Y_i = 1\} \cap \{Y_{i+1} = 1\}$  mais ici  $Y_i$  et  $Y_{i+1}$  ne sont pas indépendantes (toutes les deux dépendent de  $X_i$ ).

Pour s'en sortir exprimer  $\{Y_i Y_{i+1} = 1\}$  comme une intersection de trois événements dépendant de  $X_i, X_{i+1}$  et  $X_{i+2}$  (qui elles sont indépendantes).

On trouve  $Y_i Y_{i+1} \sim \mathcal{B}(p^3)$ .

Pour la covariance utiliser

$$\text{cov}(Y_i, Y_{i+1}) = E(Y_i Y_{i+1}) - E(Y_i)E(Y_{i+1})$$

Réponse à trouver :  $\text{cov}(Y_i, Y_{i+1}) = p^3 - p^4$ .

3.  $Y_i$  et  $Y_j$  ne sont pas indépendantes si  $j = i + 1$ , mais elles le sont si  $j \geq i + 2$ .

**16** 1. Une modélisation possible à l'aide de variables aléatoires de lois usuelles

- Noter  $X_j$  le numéro de l'urne choisie pour la  $j^{\text{e}}$  boule pour tout  $j \in \llbracket 1, an \rrbracket$ .
- $X_j \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ .
- Noter que :  $A_i = \{X_1 \neq i\} \cap \dots \cap \{X_{an} \neq i\}$ .
- Loi de  $T_i$ .  $T_i = \mathbb{1}_{A_i}$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$  et

$$P(T_i = 1) = P(A_i)$$

puis utiliser l'indépendance des  $X_j$ .

Réponse à trouver :  $P(A_i) = p_n$

• Loi de  $T_i T_j$ . De même avec  $T_i T_j = \mathbb{1}_{A_i \cap A_j}$ . Réponse à trouver :  $P(A_i \cap A_j) = r_n$

2. • **Espérance.** Exprimer  $Y_n$  à l'aide des  $T_i$  (**SF 2** option 5)

• **Variance.**  $V(S_n) = \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n V(T_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(T_i, T_j) \right)$

Calculer  $V(T_i)$  et  $\text{cov}(T_i, T_j) = E(T_i)E(T_j) - E(T_i)E(T_j)$  en utilisant les lois de  $T_i T_j$  et  $T_i$

• **Limites.** Revenir à l'exponentielle.

Réponse à trouver :  $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-a}$  et  $r_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-2a}$

**17** 1.  $X_i = \mathbb{1}_{A_i}$  où  $A_i$  est : « l'ascenseur s'arrête au  $i^{\text{e}}$  étage ».

Ainsi  $X_i$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $P(A_i)$ .

Montrer que  $P(\bar{A}_i) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$  (en notant  $E_j$  la variable désignant le numéro de l'étage choisi par la  $j^{\text{e}}$  personne,  $E_j \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, p \rrbracket)$  et  $\bar{A}_i = \{E_1 \neq i\} \cap \dots \cap \{E_n \neq i\}$ )

2. Exprimer  $X$  en fonction des  $X_i$  (voir **SF 2**).

Réponse à trouver :  $E(X) = p \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n\right)$ .

3. Les  $X_i$  n'étant pas indépendantes :

$$V(X) = \sum_{i=1}^p V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \text{cov}(X_i, X_j)$$

Dans cette expression

- $V(X_i)$  est connu vu que  $X_i \sim \mathcal{B}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n\right)$
- $\text{cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$  où :
  - $E(X_i)E(X_j)$  est connu
  - $E(X_i X_j)$  est à calculer en remarquant que  $X_i X_j$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $P(A_i \cap A_j)$ . Ici  $A_i$  et  $A_j$  ne sont pas indépendants. Utiliser  $P(A_i \cap A_j) = 1 - P(\bar{A}_i \cup \bar{A}_j) = 1 - P(\bar{A}_i) - P(\bar{A}_j) + P(\bar{A}_i \cap \bar{A}_j)$  et montrer que :  $P(\bar{A}_i \cap \bar{A}_j) = \left(1 - \frac{2}{p}\right)^n$ .

Réponse finale :

$$V(X) = p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n\right) + p(p-1) \left( \left(1 - \frac{2}{p}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2n} \right)$$

**18** 1. • **Loi de  $X$ .** Utiliser :  $P(X = i) = \sum_{j=1}^m P(\{X = i\} \cap \{Y = j\})$

Réponse :  $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$

• **Loi de  $Y$ .** De même. Réponse :  $Y \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, m \rrbracket)$

- Indépendance de  $X$  et  $Y$ . Constater les égalités

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$$

pour tous  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket$ .

- Montrer que :  $P(X = i, Y = j) = \frac{1}{nm}$   
pour tous  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket$ .

- Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes :  $P(X = i, Y = j)$  s'écrit sous la forme  $u_i v_j$  où  $u_i = P(X = i)$  et  $v_j = P(Y = j)$ .

$A$  a pour colonnes  $(v_1 C, v_2 C, \dots, v_p C)$  où  $C = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ .

- Pour la réciproque, si  $A$  est de rang 1, les colonnes  $(C_1, \dots, C_p)$  de  $A$  sont toutes proportionnelles à une même colonne  $C$ . Ceci permet de montrer que :

- $P(X = i, Y = j) = c_i \alpha_j$  pour certains  $c_i, \alpha_j \in \mathbb{R}$ .
- On en déduit :  $P(X = i) = a c_i$  et  $P(Y = j) = s \alpha_j$

$$\text{où : } a = \sum_{j=1}^p \alpha_j \quad \text{et} \quad s = \sum_{i=1}^n c_i.$$

- Il reste à montrer que  $as = 1$  pour assurer l'indépendance de  $X$  et  $Y$

1. a) Appliquer la technique du savoir-faire **SF 8**

$$\text{Réponse finale : } P(U = k) = \frac{2k-1}{n^2}$$

- Utiliser  $E(U) = \sum_{k=1}^n k P(U = k)$

- $U$  et  $V$  ne sont pas indépendantes : trouver un couple  $(i, j)$  pour lequel

$$P(\{U = i\} \cap \{V = j\}) \neq P(U = i)P(V = j)$$

- Remarquer que :  $U + V = X + Y$ .

Cela permet d'exprimer  $V$  en fonction de  $X, Y$  et  $U$  dont les espérances sont connues.

$$\text{Réponse finale : } E(V) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.$$

- Il s'agit de calculer  $P(\{U = i\} \cap \{V = j\})$  pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .  $U$  et  $V$  ne sont pas indépendantes donc :

$$P(\{U = i\} \cap \{V = j\}) \neq P(U = i)P(V = j)$$

Exprimer l'événement  $\{U = i\} \cap \{V = j\}$  en fonctions des événements  $\{X = i\}$  et  $\{Y = j\}$  et utiliser l'indépendance de  $X$  et  $Y$  (distinguer 3 cas sur  $i$  et  $j$ )

$$\text{Réponse finale : } P(\{U = i\} \cap \{V = j\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } i = j \\ \frac{2}{n^2} & \text{si } i > j \end{cases}$$

1. Deux possibilités :

- Méthode 1. En partant de l'égalité d'événements :  $\{Y_{k+1} = 1\} = \{Y_k = 1\} \cap \{X_{k+1} = 1\} \cup \{Y_k = -1\} \cap \{X_{k+1} = -1\}$  puis en prenant la probabilité de cette réunion incompatible (et  $X_{k+1}$  et indépendante de  $Y_k$ )
- Méthode 2. On calcule  $P(Y_{k+1} = 1)$  par la formule des probabilités totales avec le s.c.e.  $(\{Y_k = 1\}, \{Y_k = -1\})$ .

- $u_k + v_k = 1$

Avec 1.  $(u_k - v_k)$  est géométrique de raison  $2p - 1$   
On en déduit  $u_k$  et  $v_k$  par somme et différence

1. a) Sachant  $\{N = i\}$  il s'agit d'un tirage simultané de  $i$

boules choisies parmi  $n$  boules.

Ainsi :  $P_{\{N=i\}}(X_j = 1) = \frac{|A|}{|\Omega|}$  où

- $\Omega$  est l'ensemble des combinaisons de  $i$  boules choisies parmi  $n$
- $A$  : « La boule  $j$  fait partie des  $i$  boules choisies »

Reste à dénombrer  $\Omega$  (tirages simultanés) et  $A$ . Pour dénombrer  $A$ , penser « comme un tricheur » : réaliser  $A$  revient à mettre la boule  $j$  de côté puis à tirer  $i - 1$  boules dans l'urne contenant  $n - 1$  boules.

Réponse finale après simplifications :  $P_{\{N=i\}}(X_j = 1) = \frac{i}{n}$ .

- $X_j$  suit une loi de Bernoulli donc  $E(X_j) = P(X_j = 1)$ . Calculer  $P(X_j = 1)$  via la formule des probabilités totales avec le sce  $(\{N = i\})_{1 \leq i \leq n}$ .

$$\text{Réponse finale : } E(X_j) = \frac{n+1}{2n}$$

- Réponse finale :  $E(S) = \frac{(n+1)^2}{4}$

- Remarquer que  $\{X \geq a\} \subset \{g(X) \geq g(a)\}$  puis appliquer une inégalité probabiliste.

- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à  $\frac{S_n}{n}$ .

- Plusieurs possibilités on peut par exemple :

- Poser  $Y = \frac{X_n}{n} - p$  et appliquer l'inégalité de Markov à  $|Y|$ . Montrer ensuite que  $E(|Y|) \leq \sqrt{V(Y)}$  (fait en cours).
- Appliquer directement l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et discuter selon la position de  $\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}$  par rapport à 1.

1. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à  $\frac{S_n}{n}$ .

- $E(e^{tS_n}) = E(e^{tX_1} \dots e^{tX_n})$  puis utiliser l'indépendance des  $X_i$  et enfin le théorème de transfert pour calculer  $E(e^{tX_i})$ .

- a) Etudier la fonction  $f : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ ch } t$

- Appliquer l'inégalité de Markov :

$$P(Y \geq a) \leq \frac{E(Y)}{a} \text{ avec } Y = e^{tS_n} \text{ et } a = e^{nte}.$$

après avoir montré que  $\{Y \geq a\} = \left\{\frac{S_n}{n} \geq n\varepsilon\right\}$ .

Utiliser ensuite la question 3a).

- La question 3b) assure que :

$$\boxed{\forall t > 0}, \quad P\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \underbrace{e^{\frac{nt^2}{2} - nte}}_{=g(t)}$$

$$\text{Ainsi : } P\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \min_{t \in \mathbb{R}_+^*} g.$$

Etudier  $g$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et montrer que  $\min_{t \in \mathbb{R}_+^*} g = e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$ .

1. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à  $S_n$ .

- Remarquer que  $x^2 P(A_k) = E(x^2 \mathbb{1}_{A_k})$  puis utiliser la croissances de l'espérance.

- Remarquer que :

$$S_n^2 \mathbb{1}_{A_k} = ((S_n - S_k) + S_k)^2 \mathbb{1}_{A_k} \geq 2(S_n - S_k)S_k \mathbb{1}_{A_k} + S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}$$

puis exploiter l'indépendance de  $S_n - S_k$  et  $S_k \mathbb{1}_{A_k}$  (lemme des coalitions) pour montrer que

$$E((S_n - S_k)S_k \mathbb{1}_{A_k}) = 0$$

- $A$  est la réunion disjointe des  $A_k$ . En sommant les inégalités des deux questions précédentes :  $x^2 P(A) \leq E(S_n^2 \mathbb{1}_A)$ .

Reste à montrer que  $E(S_n^2 \mathbb{1}_A) \leq n\sigma^2$ .  
Pour cela, remarquer que  $n\sigma^2 = E(S_n)$ .

**28** Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à  $S_n$ .

**29 a)** Appliquer l'inégalité de Markov à  $(X - m + t)^2$ .

**b)** Optimiser l'inégalité de la question précédente par rapport à  $t$  : chercher le minimum de  $t \mapsto \frac{t^2 + \sigma^2}{(t + a)^2}$ .

**c)** On peut appliquer l'inégalité de la question *b* à la variable  $Y = -X$  d'espérance  $-m$ .