

Indépendance

- 1** Deux joueurs lancent une pièce de monnaie équilibrée n fois chacun. En utilisant deux variables aléatoires, calculer la probabilité p_n qu'ils obtiennent le même nombre de pile et trouver un équivalent de p_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Indication : On pourra utiliser la formule $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

- 2** Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de même loi. On note $\{u_1, \dots, u_n\}$ l'ensemble des valeurs communes de X et Y . On pose, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $p_k = P(X = u_k) = P(Y = u_k)$.

Démontrer que : $P(X \neq Y) = \sum_{k=1}^n p_k(1 - p_k)$.

- 3** Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes de loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, 2p \rrbracket)$. Avec quelle probabilité le produit $X_1 \dots X_n$ est-il pair ?

- 4**
1. Trouver tous les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tels que $M = \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix}$ représente un projecteur.
 2. Soit X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de loi $\mathcal{B}(n, p)$. Avec quelle probabilité la matrice $M = \begin{pmatrix} X & X \\ Y & Y \end{pmatrix}$ représente-elle un projecteur non-nul ?

- 5** **SF 1** Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On pose : $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$
1. On note M la matrice carrée $M = U \times U^T$ et on pose : $R = \text{rg} M$ et $S = \text{tr} M$. Déterminer les lois de R et S .
 2. Calculer la probabilité que M représente un projecteur.

- 6** **SF 2 SF 8**
1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, N \rrbracket$.
Montrer que $E(X) = \sum_{k=0}^{N-1} P(X > k)$.
 2. On lance n fois un dé équilibré. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i le numéro obtenu au i^{e} lancer et on pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.
a) Calculer $P(M_n \leq k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$.
b) En déduire $E(M_n)$ et étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(M_n)$.

- 7** **SF 8** Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. On pose $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.
a) Déterminer la loi de M_n b) On note p_n la probabilité que l'un des X_i soit égal à 1. Montrer que $p_n \geq 1 - \frac{1}{e}$.

- 8** **SF 2** Soient $X_1, \dots, X_n$ et N des variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un même espace probabilisé. On suppose que N est à valeur dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ et que $X_1, \dots, X_n$ sont de même loi. On pose : $S_N = X_1 + \dots + X_N$. Calculer $E(S_N)$ et $V(S_N)$.

- 9** **SF 1** Est-il possible de truquer deux dés de façon à ce qu'il y ait équiprobabilité sur l'ensemble des sommes possibles obtenues en les lançant simultanément ?

10 **SF 1 SF 5**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

1. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé. On suppose que $X \leq Y$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{R}$: $P(X \geq k) \leq P(Y \geq k)$.
2. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé et pour lesquelles : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n+1, p)$.
Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$: $P(X \geq k) \leq P(Y \geq k)$.
Indication : Construire deux variables aléatoires X' et Y' telles que : $X' \sim \mathcal{B}(n, p)$, $Y' \sim \mathcal{B}(n+1, p)$ et $X' \leq Y'$.

11 **SF 1**

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d-1}$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$. On note p_d la probabilité que le polynôme $X^d + \sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i X^i + 1$ possède une racine rationnelle. Trouver un équivalent de p_d lorsque d tend vers $+\infty$.

12 **SF 2 SF 12**

Soit $n \geq 2$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p = \text{Card}\{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid |X_i - X_j| \leq p\}$

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer : $E(S_p) = n + n(n-1)P(|X_1 - X_2| \leq p)$
2. **★★★★** Etablir : $P(|X_1 - X_2| \leq 2) \leq \frac{2}{n-1} + 3P(|X_1 - X_2| \leq 1)$

Variance, covariance

13 **SF 1 SF 2 SF 3 SF 9**

À un péage autoroutier n voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1, X_2, X_3 le nombre de voitures ayant franchi ces barrières.

- a) Déterminer la loi de X_1
- b) Calculer : $V(X_1)$, $V(X_2)$ et $V(X_1 + X_2)$
- c) En déduire : $\text{cov}(X_1, X_2)$.

14 **SF 5 SF 9**

Soient X, Y indépendantes de lois $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

- a) On pose $Z = X - Y$. Montrer :
 $\forall k \in \llbracket -n, n \rrbracket, P(Z = k) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{i=0}^{n-|k|} \binom{n}{i} \binom{n}{i+|k|}$
- b) Calculer $\text{cov}(X, Z)$.

15 **SF 1 SF 2 SF 3 SF 9 SF 11**

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de loi $\mathcal{B}(p)$ où $p \in]0, 1[$.

1. Pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on pose $Y_i = X_i X_{i+1}$. Déterminer la loi de Y_i puis calculer son espérance et sa variance.
2. Pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, déterminer la loi de $Y_i Y_{i+1}$ puis calculer $\text{cov}(Y_i, Y_{i+1})$.
3. Pour $1 \leq i < j < n$, Y_i et Y_j sont-elles indépendantes ?

16 **SF 1 SF 2 SF 3 SF 9**

Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 2$. On répartit au hasard an boules numérotées dans n urnes $U_1, \dots, U_n$. Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note T_i la variable indicatrice de l'événement A_i : « L'urne U_i est vide ». On note Y_n le nombre d'urnes vides après la répartition et on pose : $S_n = \frac{1}{n} Y_n$.
On pose : $p_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{an}$ et $r_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{an}$

1. Soit $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, distincts.
Démontrer que : $T_i \sim \mathcal{B}(p_n)$ et $T_i T_j \sim \mathcal{B}(r_n)$.
2. Montrer que : $E(S_n) = p_n$ et $V(S_n) = r_n - p_n^2 + \frac{p_n - r_n}{n}$
et étudier : $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(S_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(S_n)$.

17 **SF 2 SF 3 SF 9** Une foule de n personnes monte au rez-de-chaussée dans l'ascenseur d'un immeuble et chacune appuie au hasard sur un numéro entre 1 et p de l'un des étages, indépendamment des autres.

1. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire indicatrice de l'événement : « l'ascenseur s'arrête au i^e étage ». Déterminer la loi de X_i pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
2. Calculer l'espérance du nombre X d'arrêts de l'ascenseur
3. ******* Calculer la variance de X

Loi conjointe, loi conditionnelle

18 **SF 7 SF 10** Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini.

1. On suppose que $(X, Y) \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket)$ i.e. :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket, \quad P(X = i, Y = j) = \frac{1}{nm}$$
Déterminer les lois marginales de X et Y et montrer que X et Y sont indépendantes.
2. On suppose réciproquement que X et Y sont indépendantes et que : $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ et $Y \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, m \rrbracket)$.
Montrer que : $(X, Y) \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket)$

19 **SF 7 SF 10** Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini et à valeurs respectivement dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $\llbracket 1, p \rrbracket$.
On pose $A = (P(X = i, Y = j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.
Montrer que X et Y sont indépendantes ssi $\text{rg}(A) = 1$.

20 **SF 1 SF 2 SF 8 SF 11** Soit $n \geq 2$ et X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes de même loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. On pose $U = \max(X, Y)$.

1. a) Déterminer la loi de U .
b) En déduire que : $E(U) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$.
2. On pose $V = \min(X, Y)$.
a) U et V sont-elles indépendantes ?
b) Calculer $E(V)$ sans déterminer sa loi.
3. Déterminer la loi du couple (U, V) .

21 Soient $p \in]0, 1[$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de même loi définie pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ par :

$$P(X_k = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X_k = -1) = 1 - p$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose : $Y_k = X_1 \dots X_k$ (produit).

1. On pose $u_k = P(Y_k = 1)$ et $v_k = P(Y_k = -1)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Exprimer u_{k+1} et v_{k+1} en fonction de u_k et v_k pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
2. En calculant $u_k + v_k$ et $u_k - v_k$, déterminer une expression de u_k et v_k en fonction de $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

22 **SF 2 SF 4** On tire simultanément N boules de manière aléatoire dans une urne de n boules numérotées de 1 à n (où $n \in \mathbb{N}^*$). On suppose que $N \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. On note par ailleurs S la somme des numéros des boules obtenues.

1. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_j l'indicatrice de l'événement « la boule n° j figure parmi les boules tirées ».
a) Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ calculer : $P_{\{N=i\}}(X_j = 1)$.
b) En déduire l'espérance de X_j pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
2. En déduire l'espérance de S .

Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev

23 **SF 13** Soit X une variable aléatoire réelle et $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante. Etablir : $\forall a > 0, \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(g(X))}{g(a)}$

24 **SF 14** Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de même loi d'espérance m et d'écart-type σ . On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$: $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

25 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$.
Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$: $P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}$

26 **SF 13 SF 14** Soit $\varepsilon > 0$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de même loi définie pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ par :
 $P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$. On pose : $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Montrer que : $P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$.
2. Montrer que pour tout $t > 0$: $E(e^{tS_n}) = (\cosh t)^n$.
3. a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $e^{-\frac{t^2}{2}} \cosh t \leq 1$
b) Montrer que pour tout $t > 0$: $P\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq e^{\frac{nt^2}{2} - nte}$
c) En déduire : $P\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$

27 **SF 12 SF 14** Soient $x > 0$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, centrées et de même loi. On note σ leur d'écart type. On pose : $S_k = X_1 + \dots + X_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On pose enfin $A = \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x \right\}$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$A_k = \{|S_1| < x\} \cap \dots \cap \{|S_{k-1}| < x\} \cap \{|S_k| \geq x\}$$

1. Montrer que : $P(|S_n| \geq x) \leq \frac{n\sigma^2}{x^2}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $x^2 P(A_k) \leq E(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k})$
3. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $E(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}) \geq E(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k})$
4. En déduire que : $P(A) \leq \frac{n\sigma^2}{x^2}$.

28 **SF 14** Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé. On suppose que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i \sim \mathcal{B}(p_i)$ où $p_i \in [0, 1]$.

On pose : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et $m_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i$.

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$: $P(|S_n - m_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

29 **SF 13** Soit X une variable aléatoire réelle et $a > 0$.
On pose : $m = E(X)$ et $\sigma = \sigma(X)$.

- a) Montrer que pour tout $t \geq 0$: $P(X - m \geq a) \leq \frac{t^2 + \sigma^2}{(t + a)^2}$.
- b) En déduire : $P(X - m \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.
- c) Montrer enfin : $P(|X - m| \geq a) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.