

- 1 Ω est l'ensemble des 5-arrangements des dix boules de l'urne, muni de la probabilité uniforme. X est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$.

Réponses à trouver :

$$\bullet P(X=0) = \frac{2}{9}, \quad P(X=1) = \frac{5}{9}, \quad P(X=2) = \frac{2}{9}$$

- 2 a) X est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$.

- b) Modéliser une répartition des n chèvres par une n -liste $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ où :

- $C_1 \in \{1, 2, 3\}$ est le numéro du pré choisi par la première chèvre
- ...
- $C_n \in \{1, 2, 3\}$ est le numéro du pré choisi par la n^{e} chèvre

(Avec cette modélisation, « répartir » les n chèvres revient à écrire un mot $C_1 C_2 \dots C_n$ où chaque C_i est un chiffre de $\{1, 2, 3\}$.)

Ainsi Ω est l'ensemble de ces n -listes et $|\Omega| = 3^n$.

Pour calculer $P(X=2)$, recourir au dénombrement :

- $\{X=2\}$ est l'événement A : « Toutes les chèvres vont dans le même pré ».
- $P(X=2) = P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.
- Il reste à dénombrer A : mais réaliser A revient seulement à choisir le pré dans lequel on met toutes les chèvres.

Réponse finale : $P(X=2) = \frac{1}{3^{n-1}}$.

- c) Il reste à trouver $P(X=1)$ et $P(X=0)$.

Avec la modélisation ci-dessus :

- $\{X=1\}$ est l'événement B : « Un seul des trois prés reste vide ».
- $P(X=1) = \frac{|B|}{|\Omega|}$.
- Il reste à dénombrer B . Réaliser B revient

- choisir un pré parmi les 3 possibles : celui qui va rester vide.

- Ceci fait, il s'agit de placer une à une toutes chèvres dans les deux autres prés :

- Placer la première chèvre dans l'un des deux prés
- Placer la seconde chèvre dans l'un des deux prés
- ...
- Placer la n^{e} chèvre dans l'un des deux prés

Mais il faut retrancher 2 possibilités : celles où l'on place toutes les chèvres dans le même pré.

Réponse finale : $P(X=1) = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$

- Pour $P(X=0)$ utiliser $P(X=1)$ et $P(X=2)$.

- d) Calculer $E(X)$ avec la définition de l'espérance.

On obtient :

$$E(X) = \frac{2^n}{3^{n-1}} = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Le résultat est cohérent : pour un grand nombre de chèvre, aucun des prés ne sera vide.

- 3 1. N.B. Ici $\Omega = \llbracket 1, N \rrbracket^p$ (p tirages successifs avec remise).

- a) $\{X \leq k\}$ est l'événement A_k : « Les p boules tirées ont un numéro inférieur ou égal à k ».

Ainsi : $P(X \leq k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|}$.

Il reste à dénombrer A_k . Pour cela, ne pas oublier de « raisonner comme un tricheur », réaliser A_k revient à tirer successivement p boules dans une urne où l'on a placé seulement les k boules numérotées de 1 à k .

- b) Utiliser : $P(X=k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1)$ (note 1)

2. Appliquer la même méthode que celle utilisée à la question 1.

C'est le mode de dénombrement qui va changer : ici les tirages sont simultanés donc Ω est l'ensemble des combinaisons de p boules choisies parmi N boules.

Attention, ici : $X(\Omega) = \llbracket p, N \rrbracket$.

Réponse finale : $P(X=k) = \frac{\binom{k-1}{p-1}}{\binom{N}{p}}$

- 4 a) X est à valeurs dans $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ Reste à calculer la probabilité de l'événement

$\{X=k\}$: « La 1^{re} boule blanche est obtenue au k^{e} tirage »

Il convient d'avoir les bons réflexes :

- Définir des événements élémentaires :

B_k : « La k^{e} boule tirée est blanche »

- Exprimer l'événement $\{X=k\}$ comme une intersection de ces événements puis calculer $P(X=k)$ avec la formule des probabilités composées.

- b) Utiliser la définition de l'espérance, les $P(X=k)$ sont connues avec la question précédente, il s'agit de calculer la somme obtenue.

- c) Schématiquement :

$$Y = \text{Nb. de boules rouges au départ}$$

—

$$\text{Nb. de boules rouges tirées entre 1 et } X-1$$

On obtient une expression de Y en fonction de X de la forme $Y = aX + b$.

Pour calculer l'espérance de Y , utiliser la linéarité de l'espérance.

- 5 Bien comprendre la composition de l'urne, elle est de la forme : ①②②③③③④④④④... (jusqu'à $2n$ boules portant le numéro $2n$).

En particulier commencer par compter le nombre total de boules dans l'urne.

- a) • Loi de X .

$$X(\Omega) = \llbracket 1, 2n \rrbracket.$$

$$\text{Pour } k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, P(X=k) = \frac{\text{Nb. de boules portant le numéro } k}{\text{Nb. total de boules dans l'urne}}.$$

- Espérance de X . Utiliser la définition de l'espérance et calculer la somme.

- b) Il faut avoir le bon réflexe de nommer l'événement i.e. d'écrire $p_n = P(A_n)$ où A est l'événement « Le numéro obtenu est pair ».

Exprimer A_n comme une réunion incompatible

1. Pour s'en rappeler : « Etre égal à k c'est être inférieur ou égal à k mais pas inférieur ou égal à $k-1$ » et le « mais » donne un signe « - »

6

Point à retenir

L'écriture correcte de l'événement « le mobile avance d'une case » est : $\{X_{n-1} = k-1\} \cap \{X_n = k\}$ qui traduit : « Le mobile était en $k-1$ à l'instant $n-1$ et il est en k à l'instant n ».

1. a) X_n est à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots, n\} = \llbracket 0, n \rrbracket$

b)

Combiner deux idées :

• Ecrire : $\{X_n = k\} = \{X_{n-1} = k-1\} \cap \{X_n = k\}$ (note ²)

• Remarquer que : $p = P_{\{X_{n-1}=k-1\}}(X_n = k)$.

2. Partir de : $E(X_n) = \sum_{k=0}^n kP(X_n = k)$ puis utiliser **1b)** pour faire apparaître $E(X_{n-1})$.
Une fois l'égalité $E(X_n) = pE(X_{n-1}) + p$ obtenue, remarquer que la suite $u = (E(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique

7 1. Ecrire : $\{T > k\} = \{T > k-1\} \cap \{T > k\}$.

Remarquer que : $P_{\{T > k-1\}}(T > k) = \frac{n-(k-1)}{n}$.

2. Répéter la relation de 1. pour calculer $P(T > k)$.
Ensuite utiliser : $P(T = k) = P(T > k-1) - P(T > k)$.

Réponse ³ : $P(T = k) = \frac{n!(k-1)}{(n-k+1)!n^k}$
pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$

8 1. Prendre pour univers l'ensemble Ω des $2n$ -arrangements de $2n$ boules de l'urne.

Réaliser $\{X = k\}$ revient à :

- Choisir les $n-1$ positions des tirages donnant des boules noires parmi les tirages $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$ (le tirage k donne une boule noire).
- Une fois ces positions fixées il s'agit de « ranger » les n boules noires sur les n positions choisies pour les tirages donnant des boules noires et les n boules blanches sur leurs n positions.

Réponse après simplifications : $P(X = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$

2. a) Utiliser la formule de Pascal pour faire apparaître une somme télescopique.

b) Réponse : $E(X) = \frac{n(2n+1)}{n+1}$

2. Cette égalité a lieu parce que $\{X_n = k\} \subset \{X_{n-1} = k-1\}$: pour être en k à l'instant n , il faut avoir été en $k-1$ à l'instant d'avant

3. Que l'on peut aussi obtenir directement par un argument combinatoire

4. Remarquer la rédaction particulière aux variables aléatoires : lorsque l'on « résout une équation dans un événement » on écrit des égalités au lieu des équivalences utilisées habituellement. Au brouillon, vous pouvez très bien utiliser des « $\Leftrightarrow$ » et écrire : $Y = k \Leftrightarrow |X - n| = k$ mais pensez ensuite lorsque vous rédigez au propre à revenir aux égalités entre événements i.e. à écrire : $\{Y = k\} = \{|X - n| = k\}$. La raison est que l'on a affaire à des égalités entre des ensembles et, de façon générale, si A et B sont des parties d'un ensemble E écrire : $(\forall x \in E, (x \in A \Leftrightarrow x \in B))$ équivaut à écrire : $A = B$

9

Notant $\{x_1, \dots, x_n\}$ la réunion des valeurs prises par X_1 et X_2 , constater que l'hypothèse s'écrit

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n x_i^k P(X_1 = x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^k P(X_2 = x_i)$$

Montrer alors que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X], \sum_{i=1}^n Q(x_i) P(X_1 = x_i) = \sum_{i=1}^n Q(x_i) P(X_2 = x_i)$$

puis en déduire que $P(X_1 = x_i) = P(X_2 = x_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ à l'aide de polynômes de Lagrange.

10

• Y est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$

• Pour calculer les $P(Y = k)$ exprimer l'événement $\{Y = k\}$ en fonction d'événements liés à X .

Par exemple, si $k \neq 0$:

$$\{Y = k\} = \{|X - n| = k\} = \{X = n+k\} \cup \{X = n-k\}$$

(note ⁴).

C'est une réunion incompatible et la probabilité de chaque événement $\{X = n+k\}$ et $\{X = n-k\}$ est connue (X suit une loi usuelle).

$$\text{Réponse finale : } P(Y = k) = \begin{cases} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} & \text{si } k = 0 \\ \binom{2n}{n+k} \frac{1}{2^{2n-1}} & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

11

N.B La loi de X est connue :

• X est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$

• $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Utiliser la formule de transfert :

$$E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k} P(X = k)$$

On est ramené à un calcul de somme.

Pour calculer la somme obtenue il y a deux possibilités :

• *Première possibilité* : Utiliser la formule sans nom pour écrire $\frac{1}{1+k} \binom{n}{k} = \frac{1}{1+n} \binom{n+1}{k+1}$

• *Deuxième possibilité* : Exploiter astucieusement l'égalité :

$$\forall x \in [0, 1], \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-p)^{n-k} = (x + 1 - p)^n$$

(l'astuce est voisine de celle utilisée pour calculer dans le cours l'espérance de la loi binomiale).

12

1. Utiliser le théorème de transfert. On obtient $E(Y) = 0$.

2. Y est à valeurs dans $\left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}\right\}$.

Pour chaque valeur $k \in \left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}\right\}$ exprimer $\{Y = k\}$ en fonction d'événements du type $\{X \equiv \dots [6]\}$.

13 N.B X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$:

- Y est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- *Attention* : $P(Y = k)$ n'est pas connue, car Y est définie en fonction de la valeur de X . En particulier ne pas dire que Y suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, X \rrbracket$: cela n'a pas de sens car X est une variable aléatoire (et pas un nombre fixé).
- Ce que l'on connaît c'est la loi de Y « lorsque X est gelé » : sachant $\{X = i\}$ on sait que Y est choisi au hasard entre 1 et i donc pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$P_{\{X=i\}}(Y = k) = \begin{cases} \frac{1}{i} & \text{si } k \leq i \\ 0 & \text{si } k > i \end{cases}$$

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $P(Y = k)$ en appliquant la formule des probabilités totales avec le s.c.e. $(\{X = i\})_{1 \leq i \leq n}$

$$\text{Réponse finale : } P(Y = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=k}^n \frac{1}{i} \quad \text{puis} \quad E(Y) = \frac{n+3}{4}.$$

14 a) La loi de X se trouve sans calcul : c'est une loi usuelle.

- b) On peut calculer $E(Y)$ sans déterminer la loi de Y : il suffit d'exprimer Y en fonction de X puis d'utiliser la linéarité de l'espérance. Schématiquement :

$$Y = \underbrace{t \times (\text{Nb. de parties gagnées})}_{\text{à exprimer en fct de } X} - \underbrace{(\text{Nb. de parties perdues})}_{\text{à exprimer en fct de } X}$$

$$\text{Réponse à trouver : } E(Y) = (t+1) \frac{Nb}{b+n} - N.$$

$$\text{Réponse finale : } E(Y) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{n}{b}.$$

15 *Attention* : la loi de S n'est pas usuelle. Mais on peut exprimer S à l'aide de lois usuelles. Noter X la variable aléatoire qui compte le nombre de jour où l'action est multipliée par α . X suit une loi usuelle (facile, X compte des « succès »). On obtient une expression de la forme $S = f(X)$. Calculer $E(S)$ à l'aide de la formule de transfert.

$$\text{Réponse finale : } E(S) = (\alpha p + \beta q)^n.$$

$$\text{Pour la variance utiliser } V(S) = E(S^2) - (E(S))^2.$$

Pour calculer $E(S^2)$ utiliser la formule de transfert.

$$\text{Réponse finale : } V(S) = (\alpha^2 p + \beta^2 q)^n - (\alpha p + \beta q)^{2n}.$$

16 a) Ecrire : $\{Y = k\} = \{X = 0\} \cap \{Y = k\} \cup \{X = k\}$ ⁵ puis évaluer les probabilités.

- b) Utiliser la définition de l'espérance : $E(Y) = \sum_{k=1}^n k P(Y = k)$

Remplacer $P(Y = k)$ par la valeur trouvée en a) puis sé-

parer les deux sommes : $\sum_{k=0}^n k P(X = k)$ et $P(X = 0)$

s'obtiennent sans calcul vu que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

$$\text{Réponse à trouver : } E(Y) = np + (1-p)^n \times \frac{n+1}{2}.$$

5. Cette égalité a lieu parce que $Y = k$ ssi $X = k$ ou si $X = 0$ et si le nombre tiré au hasard est égal à k

17 a) La loi de Y_n se trouve sans calcul : c'est une loi usuelle. Il n'est pas nécessaire de trouver la loi de X_n pour trouver son espérance : on peut exprimer X_n en fonction de Y_n . Schématiquement :

$$X_n = \underbrace{(\text{Nb. de sauts d'une unité})}_{Y_n} + 2 \times \underbrace{(\text{Nb. de sauts de 2 unités})}_{n-Y_n}$$

$$\text{Réponse finale : } E(X_n) = n(2-p).$$

- b) X_n est à valeurs dans $\llbracket n, 2n \rrbracket$.

On connaît $P(Y_n = j)$ pour tout j (c'est une loi binomiale). Pour $k \in \llbracket n, 2n \rrbracket$ il suffit exprimer l'événement $\{X_n = k\}$ en fonction de Y_n ie de compléter $\{X_n = k\} = \{Y_n = \dots\}$

Pour cela, au brouillon « résoudre » $X_n = k \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow Y_n = \bullet$

Au propre écrire : $\{X_n = k\} = \{\dots\} = \dots = \{Y_n = \bullet\}$

$$\text{Réponse finale : } P(X_n = k) = \binom{n}{k-n} p^{2n-k} (1-p)^{k-n}$$

18 1. La loi de X_k se trouve sans calcul : c'est une loi usuelle (X_k compte le nombre de chaussettes dans le tiroir k).

2. Exprimer X à l'aide des $\mathbb{1}_{\{X_k=0\}}$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\text{Réponse : } E(X) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$$

19 Procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour l'hérédité utiliser l'égalité

$$\{X_{n+1} = k\} = (\{X_n = k\} \cap \{X_{n+1} = k\}) \cup (\{X_n = k-1\} \cap \{X_{n+1} = k\})$$

Et noter que

- $P_{\{X_n=k\}}(X_{n+1} = k)$ est la probabilité de tirer une boule noire dans une urne de $n+2$ boules dont $k+1$ sont blanches.
- $P_{\{X_n=k-1\}}(X_{n+1} = k)$ est la probabilité de tirer une boule blanche dans une urne de $n+2$ boules dont k sont blanches.

20 Par définition :

- Z est à valeurs dans $\mathbb{U}_n = \{\omega_0, \dots, \omega_{n-1}\}$ où $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$
- Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$: $P(Z = \omega_k) = \frac{1}{n}$ (car $\text{Card } \mathbb{U}_n = n$)

$$\text{a) Calculer } E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k P(Z = \omega_k).$$

$$\text{Ensuite : } E(\text{Re } Z) = \text{Re}(E(Z)) \text{ et } E(\text{Im } Z) = \text{Im}(E(Z))$$

- b) Utiliser le théorème de transfert

$$E(\text{Re } Z \text{ Im } Z) = \sum_{k=0}^{n-1} \text{Re}(\omega_k) \text{Im}(\omega_k) P(Z = \omega_k)$$

Ensuite utiliser une formule de trigonométrie pour se ramener à une somme du type $\sum_{k=0}^{n-1} \sin(\theta_k)$ que l'on calcule en utilisant les nombres complexes.

21 En exprimant μ_r à l'aide de la formule de transfert, le terme général $\frac{\mu_r x^r}{r!}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de séries exponentielles de paramètres $(k - np)x$.

$$\text{Réponse : } \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{\mu_r x^r}{r!} = e^{-np x} (p e^x + 1 - p)^n.$$

- 23** 1. C'est une somme géométrique de raison ω^j .

$$\text{Réponse : } S_j = \begin{cases} k & \text{si } k \mid j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. $X_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ et :

$$p_n = P(k \mid X_n) = \sum_{0 \leq j \leq n} P(X_n = j) \cdot \sum_{k \mid j} \frac{S_j}{k} P(X_n = j)$$

En remplaçant S_j par son expression puis en intervertissant les sommes doubles, la somme intérieure (en j) est une somme du binôme, en utilisant ensuite la transformation de $1 + e^{i\theta}$ on obtient $p_n = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} \cos^n\left(\frac{\pi\ell}{k}\right) e^{\frac{i n \pi \ell}{k}}$.

Réponse : $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k}$, ce qui est conforme à l'intuition

- 23** On note E_n l'ensemble $\mathcal{F}(\llbracket 1, n \rrbracket, \llbracket 1, n \rrbracket)$ des applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même.

a) Puisque f_n suit la loi uniforme sur E_n :

$$P(N_n = k) = \frac{\text{nombre d'applications } f \in E_n \text{ ayant } k \text{ points fixes}}{\text{nombre total d'applications de } E_n}$$

$$\text{Réponse à trouver : } P(N_n = k) = \frac{\binom{n}{k} (n-k)!}{n^n}$$

- b) Réponse à trouver : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(N_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!}$

- 24** 1. a) Utiliser la formule des probabilités totales après avoir constaté que : $P_{\{X_k=i\}}(X_k - X_{k+1} = 1) = \frac{2i}{2n-k}$.

b) Remarquer que $X_k - X_{k+1}$ suit une loi de Bernoulli.

2. Répéter la relation de **1b**) en partant de $E(X_k)$.

$$\text{Réponse : } E(X_k) = \frac{(2n - (k+1))(2n - k)}{2n(2n - 1)} n$$

- 25** 1. Partir de : $E(X) = \sum_{k=1}^n kP(X = k)$

et utiliser : $P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1)$

2. a) Prendre pour univers l'ensemble Ω des n -arrangements des n boules de l'urne.

Réaliser $\{X = k\}$ c'est :

- Choisir une k -liste de $\llbracket 1, n \rrbracket$ strictement croissante
- Puis choisir les numéros des $n - k$ dernière boules

$$\text{Réponse simplifiée : } P(X \geq k) = \frac{1}{k!}$$

- b) Utiliser **1..** Réponse : $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X) = e - 1$.

- 26** 1. Partir de : $E(X) = \sum_{k=0}^N kP(X = k)$

et utiliser : $P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k)$

2. a) Utiliser la **1.** : $E(X_N) = \sum_{k=0}^{N-1} P(X_N > k) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{|A_k|}{|\Omega|}$ où :

- A_k est l'événement : « Les n boules tirées ont un numéro supérieur ou égal à $k+1$ »
- $\Omega = \llbracket 1, N \rrbracket^n$ (n tirages successifs avec remise).

Réaliser A_k revient à tirer successivement n boules dans une urne contenant les $N - k$ boules numérotées de $k+1$ à N . Réponse à trouver :

$$E(X_N) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n = N \times \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n\right)}_{S_N}$$

Pour l'équivalent de $E(X_N)$ remarquer que S_N est une somme de Riemann de $t \mapsto (1-t)^n$.

- b) Adapter le raisonnement de la question 1 : partir de

$$\text{la formule de transfert } E(X_N^2) = \sum_{k=0}^N k^2 P(X_N = k)$$

et utiliser $P(X_N = k) = P(X_N > k - 1) - P(X_N > k)$

- c) Utiliser $V(X_N) = E(X_N^2) - E(X_N)^2$:

• Avec **2a**) : (1) $E(X_N)^2 = \frac{N^2}{(n+1)^2} + o(N^2)$

- L'expression de **2b**) donne

$$E(X_N^2) = \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n = 2 \sum_{k=0}^{N-1} k \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n + E(X_N)$$

En utilisant les sommes de Riemann on trouve :

$$T_N \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{N^2}{(n+1)(n+2)} \text{ et}$$

$$(2) \quad E(X_N^2) = \frac{2N^2}{(n+1)(n+2)} + o(N^2)$$

La différence (2) - (1) donne l'équivalent souhaité.

- 27** 1. A partir de : $E(X) = \sum_{i \in X(\Omega)} iP(X = i)$, appliquer la

formule des probabilités totales pour exprimer $P(X = i)$ en fonction des $P(A_k)$ et intervertir les sommes obtenues.

2. En notant A_k l'événement : « le tirage a lieu dans U_k », l'espérance $E_{A_k}(X)$ s'obtient sans calcul : sachant que le tirage a lieu dans U_k la loi de X est une loi usuelle. Appliquer ensuite la formule de la **1..**

$$\text{Réponse finale : } E(X) = \frac{r(n+1)}{2n}.$$

- 28** 1. a) Appliquer l'inégalité des cordes à la fonction concave

$$t \mapsto \frac{1}{t} \text{ entre } a \text{ et } b.$$

- b) Prendre l'espérance de l'inégalité de la question a) (c'est licite : c'est la propriété de croissance de l'espérance) et multiplier par $E(X)$.

$$\text{On obtient : } E(X)E\left(\frac{1}{X}\right) \leq \frac{f(m)}{ab}$$

où $m = E(X)$ et $f : t \mapsto (a+b-t)$.

Reste à montrer que $f(m) \leq \frac{(a+b)^2}{4}$.

2. Considérer une variable aléatoire de loi judicieusement choisie et appliquer le résultat de **1.**

- 29** Poser $m = E(X)$ et $A = \{X \geq am\}$ et montrer :

$$(\star) \quad \forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) \leq am + X \mathbb{1}_A$$

L'inégalité demandée s'ensuit par croissance de l'espérance.

- 30** 1. Comparer les logarithmes et utiliser la concavité de $\ln$.
2. Appliquer **1.** et utiliser la croissance de l'espérance.
3. Appliquer **2.** aux variables $\widetilde{X} = \frac{X}{E(X^p)^{\frac{1}{p}}}$ et $\widetilde{Y} = \frac{Y}{E(Y^q)^{\frac{1}{q}}}$
- 31** On pourra utiliser l'inégalité de Jensen : $f(E(X)) \leq E(f(X))$ lorsque $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.