

■ Calculer des sommes

1 **SF 1** Justifier la convergence et calculer la somme de la série de terme général u_n :

a) $u_n = 2^{3-5n}$ b) $u_n = \frac{(1+i)^n}{(1+2i)^n}$ c) $u_n = \frac{\sin n}{2^n}$
 d) $u_n = \frac{1}{n^2 - n}$ e) $u_n = \ln(1 - \frac{1}{n^2})$ f) $u_n = \frac{6n+4}{n(n^2-1)}$
 g) $u_n = \frac{n^2 2^n}{n!}$ h) $u_n = \frac{n^2 + n - 1}{n!}$

2 **SF 1** Montrer que la série $\sum \frac{1}{(n+1)(2n+1)2^{n+1}}$ converge et calculer sa somme.

3 **SF 6** 1. Déterminer en fonction de $a, b \in \mathbb{R}$ la nature de

$$\sum (\ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2))$$

2. Calculer la somme lorsqu'il y a convergence.

■ Utilisation des critères de comparaison

4 **SF 2** **SF 4** Etudier la nature des séries de terme général u_n :

a) $u_n = \frac{n^5 + \ln n}{n^7 + 1}$ b) $u_n = \sin(2^{-n})$
 c) $u_n = \frac{\text{Arctan}(n^5)}{n^2}$ d) $u_n = \ln\left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n + 2}\right)$
 e) $u_n = n^{\frac{1}{n}}$ f) $u_n = \frac{1}{nn^{1/n}}$
 g) $u_n = \left(\frac{n}{1+n}\right)^{\sqrt{n}}$ h) $u_n = \frac{\text{ch } n}{\text{ch } 2n}$
 i) $u_n = \sin n$ j) $u_n = \frac{1}{\ln n}$
 k) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n} \cos^2 n}$ l) $u_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$

5 **SF 2** **SF 4** Etudier la nature des séries de terme général u_n :

a) $u_n = \frac{1 + (-1)^n n}{n^2}$ b) $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n^2}$
 c) $u_n = \frac{\cos n - \sin n}{n^2}$ d) $u_n = 1 + \frac{3}{n^2}$
 e) $u_n = \sqrt{n + \frac{1}{2}} - \sqrt{n}$ f) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^2} - 1$

6 **SF 2** **SF 4** **SF 5** Etudier la nature des séries :

a) $\sum n^3 e^{-n}$ b) $\sum \frac{\ln n}{n} \ln(1 + \frac{1}{n})$
 c) $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ d) $\sum \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^3}$
 e) $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ f) $\sum \left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)^{\sqrt{n}}$ g) $\sum e^{-\sqrt{\ln n}}$

7 **SF 2** **SF 4** Etudier la nature des séries de terme général u_n :

a) $u_n = 2 \ln(n^3 + 3) - 3 \ln(n^2 + 2)$
 b) $u_n = \frac{n!}{n^n}$ c) $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
 d) $u_n = \sin\left(\text{sh} \frac{1}{n}\right) - \text{sh}\left(\sin \frac{1}{n}\right)$ e) $u_n = \int_n^{2n} \frac{dt}{1+t^{\frac{3}{2}}}$

8 **SF 4** **SF 6** Déterminer en fonction de $\alpha > 0$ la nature de :

a) $\sum \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \alpha \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ b) $\sum \cos\left(\text{Arctan } n + \frac{1}{n^\alpha}\right)$

9 **SF 4**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

1. Etablir : $R_n \sim \frac{1}{(n+1)!}$.
2. En déduire que la série $\sum \sin(2\pi e n!)$ est divergente.

■ Utilisation d'une série auxiliaire

10 **SF 4**

1. Déterminer la nature de : $\sum \sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n)$.

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier pair.
 b) En déduire la nature de : $\sum \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$.

11

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad v_n = u_{2n-1} + u_{2n}$$

1. Déterminer la nature de $\sum u_n$ lorsque $\alpha \leq 0$ ou $\alpha > 1$.
2. On suppose que $\alpha \in]0, 1[$.
 a) Montrer que $\sum v_n$ converge.
 b) En déduire que $\sum u_n$ converge.

■ Des DL pour « découper » une série alternée

12 **SF 2** **SF 6**

Etudier la convergence absolue et la convergence des séries de terme général u_n :

a) $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ b) $u_n = (-1)^n \sqrt{n} \tan\left(\frac{1}{n}\right)$
 c) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + \cos n}$ d) $u_n = \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$
 e) $u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$

13 **SF 6**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Etudier la convergence absolue et la convergence de : a) $\sum (-1)^n \sqrt{n} \text{sh}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ b) $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$

14 **SF 3** **SF 4** **SF 6**

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Etudier la nature de :

a) $\sum \frac{1}{(\ln n)^p}$ b) $\sum \frac{(-1)^n}{(\ln n)^p}$

2. Etudier la convergence absolue et la convergence de la série : $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n) + (-1)^n}$

■ Autour du lien suite-série

15 **SF 6**

L'objectif est d'établir la formule de Stirling.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\sigma_n = \ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n$.
 a) Montrer que la suite $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
 b) En déduire l'existence d'une constante C telle que

$$n! \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} C \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

2. Montrer que $C = \sqrt{2\pi}$. On pourra utiliser l'équivalent $W_{2n} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$.

16 **SF 4** Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ strictement positive telle que la série $\sum u_n$ diverge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

1. Montrer que $\sum \ln \frac{S_{n-1}}{S_n}$ diverge.
2. En déduire que $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge.

17 **SF 4** **SF 6** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose : $u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Prouver que : $\ln u_{n+1} - \ln u_n = -\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ pour un certain $\alpha > 0$ à déterminer en fonction de x .
2. Montrer que $\sum \ln u_{n+1} - \ln u_n + \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge
3. En déduire que : $u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$ pour une constante $C > 0$, puis déterminer en fonction de x la nature de $\sum u_n$.

■ Théorème des séries alternées

18 **SF 3** Pour tout entier naturel n on pose : $I_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t} dt$

1. Justifier que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Etablir : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin t}{k\pi + t} dt$
3. En déduire que la suite (I_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \geq 0$.

19 **SF 3** **SF 4** **SF 6** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

1. Montrer que $R_n + R_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
2. Déterminer un équivalent de R_n .

20 **SF 3** **SF 4** **SF 6** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sqrt{k}$.

1. Montrer que $(b_n + b_{n+1})$ converge vers une limite $\ell < 0$.
2. Etudier la nature de la série $\sum \frac{1}{b_n}$.

21 **SF 3** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, décroissante, vérifiant $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Pour tout $x > 0$, on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(nx)$.

Montrer que g est bien définie et que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{f(0)}{2}$.

■ Comparaison série intégrale

22 **SF 7** Pour tout $\alpha > 1$, on pose $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Montrer que : $\zeta(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1}$.

23 **SF 7** Montrer que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2a}$.

24 **SF 8** Soit $\alpha > 1$ et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ strictement positive telle que la série $\sum u_n$ diverge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.

25 **SF 8** **SF 10** Montrer que la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge puis que : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \sim \frac{1}{\ln n}$.

26 **SF 10** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$. Trouver un équivalent de R_n .

27 Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\int_0^n |f'(t)| dt \leq M$.

1. Montrer que la série $\sum \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t) dt$ converge
2. En déduire que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_0^n f(t) dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

■ Plus abstraits

28 **SF 4** cf. Ex. 39, banque INP On note E l'ensemble des suites $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pour lesquelles la série $\sum u_n^2$ converge.

1. Montrer que pour tous réels a et b : $2|ab| \leq a^2 + b^2$.
2. Soit $u, v \in E$. Montrer que la série $\sum u_n v_n$ converge.
3. En déduire que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles.

29 **SF 4** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, strictement positive telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que les séries $\sum u_n^2$ et $\sum \frac{u_n}{1 - u_n}$ convergent.

30 **SF 6** Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent. Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{1 + u_n}$ converge.

31 **SF 4** Ex. 6, banque INP. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ strictement positive telle que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell < 1$

1. a) Démontrer qu'il existe $q \in]0, 1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \leq qu_n$
b) En déduire : $\forall n \geq n_0, u_n \leq q^{n-n_0} u_{n_0}$.
c) En déduire que la série de terme général u_n converge.
2. Application. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{n!}{n^n}$?

32 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, décroissante, telle que $\sum u_n$ converge.

1. a) Etudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$ b) En déduire : $nu_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
2. En déduire que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

33 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, positives. On suppose que la série $\sum v_n$ converge et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \leq u_n + v_n$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

34 **SF 4** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ strictement positive. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Montrer que la série $\sum u_n$ converge. Indication : montrer que pour tout $\beta < \alpha$, la suite $(n^\beta u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît à partir d'un certain rang.

35 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, strictement positive, croissante et tendant vers $+\infty$. Soit $(v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum \frac{v_n}{u_n}$ converge. Montrer que : $\frac{1}{u_n} \sum_{k=0}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.