

- 1 a)** Faire apparaître une série géométrique. Réponse :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{256}{31}$$

- b)** Il s'agit d'une série géométrique de raison $q = \frac{1+i}{1+2i}$.

$$\text{Réponse : } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 2 - i$$

- c)** Passer en complexe : $u_n = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{in}}{2^n}\right)$. La série est ainsi la partie imaginaire d'une série géométrique.

$$\text{Réponse : } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{2 \sin 1}{5 - 4 \cos 1}$$

- d)** Faire apparaître une série télescopique avec :

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}. \quad \text{Réponse : } \sum_{n=2}^{+\infty} u_n = 1.$$

- e)** On peut calculer la somme partielle en utilisant les propriétés du logarithme puis en séparant les sommes et en simplifiant les termes communs. Pour $n \geq 2$ on obtient

$$\sum_{k=2}^n u_k = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln 2. \quad \text{Réponse : } \sum_{n=2}^{+\infty} u_n = -\ln 2.$$

- f)** Par D.E.S. $u_n = \frac{-4}{n} + \frac{5}{n+1} - \frac{1}{n-1}$.

On peut ainsi calculer les sommes partielles.

$$\text{Réponse : } \sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \frac{11}{2}.$$

- g)** Faire apparaître des séries exponentielles en écrivant $n^2 = n((n-1)+1)$ au numérateur puis en séparant les

$$\text{sommes. Réponse : } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 6e^2.$$

- h)** Faire apparaître des séries exponentielles en écrivant $n^2 = n(n-1) + n$ au numérateur puis en séparant les

$$\text{sommes. Réponse : } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 2e.$$

- 2** A l'aide d'une D.E.S.

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \times \frac{1}{2^k} - \frac{1}{k+1} \times \frac{1}{2^{k+1}}$$

La somme n'est pas télescopique.

On peut la mettre sous forme intégrale en remplaçant

$$\frac{1}{2n+1} \text{ par } \int_0^1 t^{2n} dt \text{ et } \frac{1}{n+1} \text{ par } \int_0^1 t^n dt.$$

La somme qui apparaît se calcule en faisant apparaître deux sommes géométriques.

On obtient finalement, après simplifications

$$S_n = \int_0^1 \frac{1}{2-t^2} \left(2 - \frac{t^{2n+2}}{2^n}\right) dt - \int_0^1 \frac{1}{2-t} \left(1 - \frac{t^{n+1}}{2^{n+1}}\right) dt$$

On conclut de façon usuelle en séparant la partie qui dépend de n :

$$S_n = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{t-2} dt}_I - \underbrace{\int_0^1 \frac{2}{t^2-2} dt}_J - \frac{1}{2^n} \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{2-t^2} t^{2n+2} dt}_{K_n} + \frac{1}{2^{n+1}} \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{2-t} t^{n+1} dt}_{L_n}$$

puis :

- On calcule I et J (à l'aide d'une D.E.S pour J)
- On montre que K_n et L_n tendent vers 0 en encadrant l'intérieur (ou on montre qu'elles sont bornées ce qui suffit ici)

$$\text{Réponse : } S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln 2 + \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2})$$

- 3** Mettre $\ln n$ en facteur puis utiliser le DL de $\ln(1+x)$:

$$u_n = \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2) = (1+a+b) \ln n + \underbrace{\frac{a+2b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{w_n}$$

- Si $1+a+b \neq 0$ alors $u_n \sim (1+a+b) \ln n \not\rightarrow 0$.
- Si $1+a+b = 0$ i.e. si $a+b = -1$, alors $u_n = w_n$ d'où :
 - Si $a+2b \neq 0$: $u_n \sim \frac{a+2b}{n}$ et $\sum u_n$ DV.
 - Si $a+2b = 0$: $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum u_n$ CV.

La série converge ssi $1+a+b = 0$ et $a+2b = 0$ i.e. $a = -2$ et $b = 1$.

- 4** N.B. Ici les séries sont de signes constants donc les critères de convergence par majoration ou équivalence sont licites.

- a)** Convergente : $u_n \sim \frac{1}{n^2}$.
- b)** Convergente : $u_n \sim \frac{1}{2^n}$.
- c)** Convergente $u_n \sim \frac{\pi}{2n^2}$ ou $u_n \leq \frac{\pi}{2n^2}$.
- d)** Convergente $u_n \sim -\frac{1}{n^2}$.
- e)** Grossièrement divergente : $u_n \rightarrow 1$
- f)** Divergente : $u_n \sim \frac{1}{n}$
- g)** Grossièrement divergente : $u_n \rightarrow 1$
- h)** Convergente : $u_n \sim e^{-n}$.
- i)** Grossièrement divergente.
- j)** Divergente : $u_n \geq \frac{1}{n}$.
- k)** Divergente : $u_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
- l)** Convergente : $u_n \leq \frac{1}{2^n}$.

- 5 a)** Convergente (somme de deux séries convergentes).

- b)** Divergente : $u_n \sim \frac{1}{n}$
- c)** Absolument convergente : $|u_n| \leq \frac{2}{n^2}$.
- d)** Grossièrement divergente.
- e)** Divergente : $u_n \sim \frac{1}{4\sqrt{n}}$ (par quantité conjuguée ou en factorisant par $\sqrt{n}$ puis en utilisant le DL de $(1+x)^{\frac{1}{2}}$)
- f)** Divergente : $u_n \sim \frac{1}{n}$ (en revenant à l'exponentielle écrire $u_n = e^{v_n} - 1$ et montrer que $v_n \sim \frac{1}{n}$ puis utiliser l'équivalent de $e^x - 1$ en 0)

- 6** On peut appliquer la méthode du savoir-faire **SF 5** :

- On revient à l'exponentielle : $u_n = e^{v_n}$.
- $\lim v_n \neq -\infty$: il y a divergence grossière.
- Si $\lim v_n = -\infty$, on peut essayer de montrer que $n^2 u_n \rightarrow 0$:
 - On revient à l'exponentielle : $n^2 u_n = e^{2 \ln n + v_n} = e^{w_n}$.
 - Montrer que $n^2 u_n \rightarrow 0$ revient à montrer que $w_n \rightarrow -\infty$.

- a)** Convergente : $n^2 u_n \rightarrow 0$.

- b)** Convergente : $u_n \sim \frac{\ln n}{n^2}$ puis $n^{\frac{3}{2}} u_n \rightarrow 0$.

- c) Convergente : montrer que $n^2 u_n \rightarrow 0$.
 Pour cela écrire $n^2 u_n$ sous forme exponentielle

$$n^2 u_n = e^{2 \ln n} e^{n^2 \ln(\frac{n}{n+1})} = e^{w_n}$$
 Il s'agit alors de montrer que $w_n \rightarrow -\infty$.
 Pour cela, chercher un équivalent de w_n , on trouve
 $w_n \sim -n \rightarrow -\infty$.

- d) Convergente : montrer que $n^2 u_n \rightarrow 0$.
 Pour cela écrire $n^2 u_n$ sous forme exponentielle

$$n^2 u_n = e^{2 \ln n} e^{n^2 \cos(\frac{1}{n})} = e^{w_n}$$
 Il s'agit alors de montrer que $w_n \rightarrow -\infty$.
 Pour cela, chercher un équivalent de w_n , on trouve
 $w_n \sim -\frac{n}{2} \rightarrow -\infty$.

- e) Convergente : montrer que $n^2 u_n \rightarrow 0$.
 Pour cela écrire $n^2 u_n$ sous forme exponentielle

$$n^2 u_n = e^{2 \ln n} e^{-\ln n \ln(\ln n)} = e^{w_n}$$
 Il s'agit alors de montrer que $w_n \rightarrow -\infty$ (factoriser par $\ln n$)

- f) Convergente : montrer que $n^2 u_n \rightarrow 0$.
 Pour cela écrire $n^2 u_n$ sous forme exponentielle

$$n^2 u_n = e^{2 \ln n} e^{\sqrt{n} \ln(1 - \frac{1}{\ln n})} = e^{w_n}$$
 Il s'agit alors de montrer que $w_n \rightarrow -\infty$.
 Pour cela, chercher un équivalent de w_n , on trouve
 $w_n \sim -\frac{\sqrt{n}}{\ln n} \rightarrow -\infty$.

- g) Ici :
- $u_n \rightarrow 0$ donc il n'y a pas divergence grossière : mais cela ne permet pas de dire que la série converge
 - $n^2 u_n = e^{\ln n - \sqrt{\ln n}} \rightarrow +\infty$ mais cela ne permet pas non plus de dire que la série diverge.

En revanche on montre que $nu_n \rightarrow +\infty$ (revenir aux exponentielles) ce qui assure que $\sum u_n$ diverge.

- 7 a) Convergente : $u_n \sim \frac{-6}{n^2}$ (factoriser par n^3 dans le log dans le premier terme et par n^2 dans le deuxième terme et utiliser le DL de $\ln(1+x)$)

- b) Convergente $u_n \leq \frac{2}{n^2}$ dès que $n \geq 2$ en majorant judicieusement $n!$.

- c) Divergente : $u_n \sim \frac{e}{2n}$. Revenir à l'exponentielle puis mettre e en facteur : $u_n = -e(e^{v_n} - 1)$ où $v_n = n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1$. Chercher alors un équivalent de v_n . On trouve $v_n \sim -\frac{1}{2n}$ puis utiliser l'équivalent en 0 de $e^x - 1$.

- d) Convergente : en utilisant les DL on montre que $u_n = O(\frac{1}{n^3})$.

- e) Divergente : par croissance de l'intégrale (en minorant l'intérieur) on trouve $u_n \geq \frac{n}{1+(2n)^{\frac{3}{2}}} = v_n$ et $\sum v_n$ diverge car $v_n \sim \frac{1}{2^{\frac{3}{2}} \sqrt{n}}$.

- 8 a) A l'aide de DL on trouve

$$u_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) - \alpha \sin \frac{1}{n} = \frac{1-\alpha}{n} + w_n$$

où $w_n = O(\frac{1}{n^2})$. Distinguer deux cas :

- Si $\alpha = 1$ alors $u_n = O(\frac{1}{n^2})$ donc la série est convergente.
- Si $\alpha \neq 1$, alors $u_n \sim \frac{1-\alpha}{n}$ et la série est divergente.

- b) En utilisant $\text{Arctan } n = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan } \frac{1}{n}$ on obtient :

$$u_n = \cos(\text{Arctan } n + \frac{1}{n^\alpha}) = \sin(\text{Arctan } \frac{1}{n} - \frac{1}{n^\alpha}) = \sin v_n$$

1. On peut toujours séparer termes pairs et impairs : $\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{0 \leq 2p \leq n} a_{2p} + \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} a_{2p+1}$. Dans notre cas le « paquet » des termes impairs est nul

Ainsi $u_n \sim v_n$ donc la série est de même nature que $\sum \text{Arctan } \frac{1}{n} - \frac{1}{n^\alpha}$.

- Si $\alpha > 1$: $v_n \sim \frac{1}{n}$ donc la série diverge.
- Si $\alpha < 1$: $v_n \sim -\frac{1}{n^\alpha}$ donc la série diverge.
- Si $\alpha = 1$, avec un DL de Arctan : $v_n = O(\frac{1}{n^3})$ donc la série converge.

- 9 1. Appliquer une formule de Taylor à $\exp$ entre 0 et 1 :

- Option 1. On peut écrire $R_n = \frac{1}{(n+1)!} + R_{n+1}$ puis majorer $|R_{n+1}| = \left| e^1 - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \right|$ à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à $\exp$ à l'ordre $n+1$.

- Option 2. Exprimer directement $R_n = \left| e^1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right|$ sous la forme d'une intégrale avec la formule de Taylor avec reste intégral puis chercher un équivalent de l'intégrale obtenue par intégration par parties.

2. Ecrire : $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + R_n$.

- 10 1. On peut utiliser le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs :

$q = (2 - \sqrt{3}) \in]-1, 1[$ donc $q^n \rightarrow 0$ et $\sin(\pi q^n) \sim \pi q^n$ (terme général positif d'une série géométrique convergente)

2. a) Développer avec la formule du binôme :

$$(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt{3})^k 2^{n-k} \left(1 + (-1)^k \right)$$

0 si k est impair

les termes d'indices impairs se simplifient¹, la somme se réduit aux termes d'indices pairs i.e. les $k = 2p$:

$$(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n = \left(\sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} 3^p 2^{n-2p} \right) \times 2 = 2A_n$$

$A_n \in \mathbb{N}$

- b) N.B. Ici on ne peut pas reproduire le raisonnement de la a) car $(2 + \sqrt{3})^n \not\rightarrow 0$ donc impossible d'utiliser l'équivalent de $\sin x \sim x$ en 0. L'idée est d'exploiter la question a) pour se ramener à la question 1.

Utiliser la a) : $\pi(2 + \sqrt{3})^n = 2A_n \pi - (2 - \sqrt{3})^n$.

Utiliser ensuite la 2π périodicité et l'impairité du sinus pour se ramener à la question 1.

- 11 1. Ce sont les cas « simples », il y a :

- divergence grossière si $\alpha < 0$
- convergence absolue si $\alpha > 1$.

2. a) En simplifiant l'expression on obtient :

$$v_n = (-1)^n \left(\frac{1}{(2n-1)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha} \right) = (-1)^n a_n$$

a_n

Appliquer alors le théorème concernant les séries alternées (en vérifiant les conditions sur (a_n)).

- b) Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite.

- Pour (S_{2n}) : séparer les termes d'indices impairs $k = 2p - 1$ et pairs $k = 2p$:

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} u_k = \sum_{p=1}^n u_{2p-1} + \sum_{p=1}^n u_{2p} = \sum_{p=1}^n v_p$$

puis utiliser la question a).

- Pour (S_{2n+1}) , il suffit d'écrire $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$.

12 Attention, u_n n'est pas de signe constant donc :

- le critère d'équivalence n'est pas permis pour étudier la convergence
- on peut par contre utiliser un équivalent sur $|u_n|$ pour la convergence absolue
- S'il n'y a pas convergence absolue, utiliser les DL (cf. **SF 6**)

- a)** Pas absolument convergente : $|u_n| \sim \frac{1}{n}$.
Convergente : le DL de $\ln(1+x)$ permet d'écrire

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} + w_n \text{ où } w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\sum u_n$ est donc la somme de deux séries convergentes (une série alternée + une série justiciable du théorème de convergence par domination).

- b)** Pas absolument convergente : $|u_n| \sim \frac{1}{n}$.
Convergente : le DL de $\tan x$ permet d'écrire $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + w_n$ où $w_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

$\sum u_n$ est donc la somme de deux séries convergentes (une série alternée + une série justiciable du théorème de convergence par domination).

- c)** Pas absolument convergente : $|u_n| \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$.
Convergente : le DL de $\tan x$ permet d'écrire :
 $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} + w_n$ où $w_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right)$.

$\sum u_n$ est donc la somme de deux séries convergentes (une série alternée + une série justiciable du théorème de convergence par domination).

- d)** S'inspirer de la technique utilisée en cours pour l'Ex. 46, banque INP. On montre que $u_n = \frac{\pi}{2} \frac{(-1)^n}{n} + w_n$ où $w_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Cette expression permet de montrer que $\sum u_n$ converge et qu'il n'y a pas convergence absolue.

- e)** Factoriser par $\sqrt{n}$ puis utiliser le DL de $(1+x)^{\frac{1}{2}}$.
On obtient $u_n = \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.
Cette expression permet de montrer que $\sum u_n$ converge et qu'il n'y a pas convergence absolue.

13 Attention, u_n n'est pas de signe constant donc :

- le critère d'équivalence n'est pas permis pour étudier la convergence
- on peut par contre utiliser un équivalent sur $|u_n|$ pour la convergence absolue
- Lorsqu'il n'y a pas convergence absolue : utiliser les DL (voir **SF 6**)

- a)** Convergence absolue. $|u_n| \sim \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ donc il y a convergence absolue ssi $\alpha > \frac{3}{2}$.
- Convergence L'équivalent ci-dessus montre aussi que la série diverge grossièrement lorsque $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Pour $\alpha > \frac{1}{2}$, le DL de $\ln x$ permet d'écrire

$$u_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}}_{v_n} + O\left(\underbrace{\frac{1}{n^{3\alpha-\frac{1}{2}}}}_{w_n}\right)$$

$\sum u_n$ est donc la somme de deux séries convergentes (une série alternée et une série justiciable du théorème de convergence par domination).

- b)** Convergence absolue. $|u_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}$ donc il y a convergence absolue ssi $\alpha > 1$.

- Convergence Mettre $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ en facteur puis utiliser le DL de $\frac{1}{1+x}$.

$$\text{On obtient } u_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{v_n} - \underbrace{\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{w_n}.$$

La série $\sum v_n$ est convergente (série alternée).

Ainsi $\sum u_n$ est de même nature que $\sum w_n$. Or : $w_n \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}$ donc $\sum w_n$ CV ssi $\alpha > \frac{1}{2}$.

- 14** **1. a)** Divergente : $n \times \frac{1}{(\ln n)^p} \rightarrow +\infty$ donc $\frac{1}{(\ln n)^p} \geq \frac{1}{n}$ APCR.

- b)** Convergente : (série alternée).

- 2.** Il n'y a pas convergence absolue : $|u_n| \sim \frac{1}{\ln n}$.
Pour la convergence, factoriser par $\frac{(-1)^n}{\ln n}$ puis utiliser le DL de $\frac{1}{1+x}$. On trouve :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n} = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\ln n}}_{v_n} + \underbrace{-\frac{1}{\ln n^2} + o\left(\frac{1}{\ln n^2}\right)}_{w_n}$$

Avec la question a), $\sum v_n$ converge et $w_n \sim \frac{1}{\ln n^2}$ donc $\sum w_n$ diverge. La série est donc divergente.

15

- 16** **1.** Il s'agit d'une série télescopique $\sum \ln S_{n-1} - \ln S_n$, il suffit d'utiliser le théorème relatif à ce type de série.

- 2.** Remarquer que $\ln \frac{S_{n-1}}{S_n} = \ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$.

- 17** **1.** $\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Avec la définition de u_n on trouve : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n} \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)$.
Un DL de $\ln(1+u)$ donne $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \underbrace{\frac{x}{2(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{=w_n}$.

Un nouveau DL de $\ln(1+w)$ donne ensuite

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -\frac{x}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

- 2.** Le résultat de la 1 et un DL de $\ln(1+x)$ donnent

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n + \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

- 3.** Il s'agit de montrer que $n^\alpha u_n \rightarrow C > 0$.
Reconnaître une série télescopique dans la question 2 et utiliser le théorème relatif à ce type de série. La série $\sum u_n$ est donc de même nature que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.
Réponse : $\sum u_n$ CV ssi $\alpha > 2$.

- 18** **1.** Justifier que $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0, n\pi]$.

- 2.** Découper l'intégrale comme une somme d'intégrales sur $[k\pi, (k+1)\pi]$ puis effectuer le changement de variable $t = k\pi + x$.

3. Utiliser le théorème des séries alternées pour justifier la convergence. La positivité de la limite s'obtient en exprimant la limite en fonction de R_0 puis en utilisant l'encadrement de R_0 fourni par le théorème des séries alternées.

- 19** 1. Commencer par montrer que $R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$ puis appliquer la majoration des restes fournie par le théorème des séries alternées (**SF 3**) pour majorer $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} \right|$.
2. Simplifier $R_n - R_{n+1}$ puis combiner avec le résultat de 1..
On obtient : $R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

- 20** 1. Remarquer que $b_n + b_{n+1} = -\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$ (quantité conjuguée) pour faire apparaître une série alternée. Pour le signe de la limite utiliser la majoration des restes fournie par le théorème des séries alternées (**SF 3**) pour minorer $R_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$.
2. Poser $u_n = b_n + b_{n+1}$ et remarquer que :

• La question 1. assure que $u_n \sim \ell$.

• $b_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{2} + \frac{u_n}{2}$

En factorisant par $\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ montrer alors que

$$\frac{1}{b_n} = \frac{2(-1)^n}{\sqrt{n}} - \underbrace{\frac{2u_n}{n} + o\left(\frac{u_n}{n}\right)}_{=w_n}$$

ce qui permet de montrer que $\sum \frac{1}{b_n}$ diverge.

- 21** Commencer par montrer que pour tout $x > 0$:

$$g(x) - \frac{f(0)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{2kx}^{(2k+1)x} f'(t+x) - f'(t) dt$$

- 22** On écrit $\zeta(\alpha) = \lim_{x \rightarrow +\infty} S_n$ où $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ puis on encadre S_n à l'aide d'une comparaison série-intégrale en partant de

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

Tous calculs faits on obtient

$$\frac{1 - (n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leq S_n \leq 1 + \frac{1 - n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

Conclure ensuite par passage à la limite $n \rightarrow +\infty$ puis encadrement (version équivalents) pour $\alpha \rightarrow 1^+$.

- 23** La comparaison série-intégrale, qui s'appuie sur la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^2+a^2}$ sur $[1, +\infty[$ pour écrire

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(k+1)^2+a^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2+a^2} dt \leq \frac{1}{k^2+a^2}$$

permet tous calculs faits de montrer que

$$\frac{1}{a} \left(\text{Arctan} \frac{n+1}{a} - \text{Arctan} \frac{1}{a} \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+a^2} \leq \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{a} \left(\text{Arctan} \frac{n}{a} - \text{Arctan} \frac{1}{a} \right)$$

Conclure ensuite par passage à la limite $n \rightarrow +\infty$ puis encadrement pour $a \rightarrow 1^+$.

- 24** Exploiter la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sur $]0, +\infty[$ pour montrer que pour tout $k \geq 1$: $\frac{u_k}{S_k^\alpha} \leq \int_{S_{k-1}}^{S_k} \frac{1}{t^\alpha} dt$. Adapter ensuite la technique de comparaison série-intégrale pour montrer la convergence de $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.

- 25** 1. La comparaison série-intégrale, qui s'appuie sur la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^2}$ sur $[2, +\infty[$ pour écrire

$$\frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t(\ln t)^2} dt \leq \frac{1}{k(\ln k)^2}$$

et permet tous calculs faits de montrer que

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{\ln 2}$$

La série est donc majorée. Puisqu'elle est à termes positif elle est convergente (par théorème).

2. Pour encadrer $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$, repartir de l'encadrement

$$\frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t(\ln t)^2} dt \leq \frac{1}{k(\ln k)^2}$$

et suivre le savoir-faire **SF 10**.

Tous calculs faits on obtient

$$\frac{1}{\ln(n+1)} \leq R_n \leq \frac{1}{\ln n}$$

qui conduit au résultat demandé.

- 26** La décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ sur $[1, +\infty[$ pour écrire

$$\frac{1}{(k+1)^3} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^3} dt \leq \frac{1}{k^3}$$

Fixer d'abord $n \geq 1$ et $N \geq n$ (N est destiné à tendre vers $+\infty$) et sommer les inégalités ci-dessus.

Passer ensuite à la limite dans les inégalités pour $N \rightarrow +\infty$.

Réponse : $R_n \sim \frac{1}{2n^2}$

- 27** 1. Posant $a_k = \int_k^{k+1} (k+1-t)f'(t) dt$, on peut montrer que $\sum a_k$ converge absolument en majorant les sommes partielles $\sum_{k=0}^n |a_k|$ par M .

2. Intégrer $\int_k^{k+1} (k+1-t)f'(t) dt$ par parties puis sommer pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

- 28** 1. Développer $0 \leq (|a| - |b|)^2$.

2. La 1 assure que $\sum u_n v_n$ converge absolument.

3. Il s'agit de montrer que

• E possède la suite nulle $u = (0)_{n \in \mathbb{N}}$ i.e. que $\sum 0^2$ converge.

- E est stable par combinaison linéaire. Fixer $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et montrer que $w = \lambda u + \mu v \in E$.
Il s'agit de montrer que la série $\sum w_n^2$ converge : développer w_n^2 et justifier la convergence de tous les morceaux.

29 La série est à termes positifs donc on peut utiliser tous les critères de comparaison (y compris inégalités et équivalents).

- Convergence de $\sum u_n^2$. Deux possibilités (au moins) :
 - Méthode 1 : On justifie que $u_n^2 = o(u_n)$.
 - Méthode 2 : On justifie que $u_n^2 \leq u_n$ APCR.
- Convergence de $\sum v_n$ où $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$. Montrer que $v_n \sim u_n$.

30 Attention : ici u_n n'est pas de signe constant donc le critère d'équivalence et la majoration ne sont pas permis pour étudier la convergence. Utiliser le DL de $\frac{1}{1+x}$, on obtient $\frac{u_n}{1+u_n} = u_n + w_n$ où $w_n = O(u_n^2)$.

- 31** 1. a) Ecrire $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell$ en revenant à la définition de la limite puis fixer ε tel que $q = \ell + \varepsilon < 1$ (par exemple $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$).
- b) Par récurrence sur $n \geq n_0$.
- c) La b) assure qu'APCR $u_n \leq Cq^n$ et $q \in]-1, 1[$ donc la série géométrique $\sum q^n$ converge.
2. Appliquer le critère démontré à la question 1 : pour montrer que $\sum u_n$ converge il suffit de montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell < 1$.
Ici on obtient $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \frac{1}{e}$.

32 N.B. La suite (u_n) est décroissante et tend vers 0 (car $\sum u_n$ converge) donc elle est en particulier positive.

1. a) $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k = S_{2n} - S_n$ où (S_n) est la suite des sommes partielles de la série.

- b) Minorer « l'intérieur » de $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$ à l'aide de la décroissance de u

2. Il s'agit de montrer que la suite $v = (nu_n)$ tend vers 0. La question 2 assure que $v_{2n} \rightarrow 0$.
Par théorème il suffit de montrer que $v_{2n+1} \rightarrow 0$.
On peut adapter la démarche de la question 2 mais il y a plus rapide en utilisant la décroissance de u :
 $v_{2n+1} = (2n+1)u_{2n+1} \leq (2n+1)u_{2n} = v_{2n} + u_{2n}$.
Le résultat en découle par encadrement.

33 En notant (S_n) la suite des sommes partielles de $\sum v_n$, appliquer le théorème de la limite monotone à la suite $(u_n - S_{n-1})_{n \geq 1}$.

34 Suivre d'abord l'indication en montrant que pour $\beta < \alpha$, la suite $v = (n^\beta u_n)$ est décroissante APCR.

Calculer $\frac{v_{n+1}}{v_n} = (1 + \frac{1}{n})^\beta \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

L'hypothèse de l'énoncé et un DL de $(1 + \frac{1}{n})^\beta$ à l'ordre 1 conduisent à $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + \frac{\beta-\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$.

Ainsi $\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 \sim \frac{\beta-\alpha}{n} < 0$.

Ensuite la décroissance APCR de v assure qu'à partir d'un certain n_0 : $v_n \leq v_{n_0}$ ce qui donne une majoration de la forme

$$u_n \leq \frac{C}{n^\beta}.$$

Il suffit de choisir un $\beta \in]1, \alpha[$ pour assurer la convergence de $\sum \frac{1}{n^\beta}$ et donc celle de $\sum u_n$.

35 Par hypothèse $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{v_k}{u_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

L'idée est d'exprimer $\frac{1}{u_n} \sum_{k=0}^n v_k$ à l'aide de ces restes.

Pour $n \geq 1$: $\frac{v_n}{u_n} = R_{n-1} - R_n$ donc $v_n = u_n(R_{n-1} - R_n)$.

Remplacer v_n par cette expression, puis en séparer les sommes, réindexer pour faire apparaître R_k dans chaque somme et regrouper ensuite les sommes. On obtient

$$\frac{1}{u_n} \sum_{k=0}^n v_k = \frac{v_0}{u_n} + \frac{u_1 R_0}{u_n} - R_n + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) R_k}_{a_n}$$

Les hypothèses de l'énoncé assurent que

$$\frac{v_0}{u_n} + \frac{u_1 R_0}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Il reste à montrer que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Revenir pour cela à la définition de la limite.

Fixer $\varepsilon > 0$ et, vu que $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$: $|R_n| \leq \varepsilon$.

Ensuite $|a_n| \leq \frac{1}{u_n} \sum_{k=1}^{n-1} |(u_{k+1} - u_k) R_k|$.

Pour $n \geq n_0$, couper la somme en deux en l'indice $k = n_0 - 1$:

- $\frac{1}{u_n} \sum_{k=1}^{n_0-1} |(u_{k+1} - u_k) R_k|$ est de la forme $\frac{1}{u_n} \times \text{Cst}$ donc il est de limite nulle et par conséquent majorable par ε à partir d'un certain rang $n_1 \geq n_0$.

- Dans $\frac{1}{u_n} \sum_{k=n_0}^{n-1} |(u_{k+1} - u_k) R_k|$, la croissance de la suite u permet d'écrire

$$|(u_{k+1} - u_k) R_k| = (u_{k+1} - u_k) |R_k| \leq (u_{k+1} - u_k) \varepsilon$$

et donc par télescopage de majorer le tout par $\frac{u_n - u_{n_0}}{u_n} \varepsilon \leq \varepsilon$.

Les considérations précédentes permettent de majorer $|a_n|$ par 2ε pour $n \geq n_1$.