

- **Cadre.** • (Ω, P) est un espace probabilisé fini
- X et Y sont des variables aléatoires complexes sur Ω

1 Espérance

Définition 1

L'espérance de X est le nombre complexe :

- **Vocabulaire.** X est dite *centrée* si $E(X) = 0$.

Exemple 1 — Si X est constante de valeur a :

Exemple 2 **SF 2** — Calculer $E(X)$ dans le cas des n lancers de pièce où X est le n° du 1^{er} lancer qui donne pile.

Exemple 3 — On suppose que $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que pour tout $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $E(X) \leq m - 1 + nP(X \geq m)$.

Exercice 1 Une autre expression de l'espérance — Montrer que :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

Théorème 1 : Propriétés de l'espérance

1. *Linéarité.* Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$
2. *Inégalité triangulaire.*
3. Si X et Y sont réelles.
 - *Positivité.*

- *Croissance.*

Exercice 2 — Démontrer le point 1 (linéarité).

⚡ **Attention** ⚡ Pour le produit, en général :

Exemple 4 **SF 2** — On lance deux fois un dé équilibré. En moyenne, combien vaut la somme des deux résultats ?

Théorème 2 : Formule de transfert

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que X est à valeurs dans I . Alors :

Exercice 3 — Démontrer cette formule.

Exemple 5 **SF 2** — On lance un dé équilibré, on note X le résultat obtenu. Calculer : $E(X^2)$ et $E(e^X)$.

Exemple 6 **SF 2** — Soit I un intervalle, $f \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$, concave et X une variable aléatoire à valeurs dans I

a) Montrer que $E(X) \in I$ b) Montrer que : $E(f(X)) \leq f(E(X))$

2 Variance Ici X est une variable aléatoire réelle.

Définition 2

- La variance de X est le réel positif :
- L'écart-type de X est :

Théorème 3 : Propriétés de la variance

1. *Formule de Koenig-Huygens.*
2. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

⚡ **Attention** ⚡ En général :

- **Vocabulaire.** Pour $k \in \mathbb{N}$, l'espérance $E(X^k)$ est appelée le moment d'ordre k de X .

Exercice 4 — Démontrer les deux relations du théorème.

Exemple 7 — On suppose que : $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $P(X = k) = \lambda k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

a) Calculer λ b) Calculer $E(X)$ c) Calculer $V(X)$ On pourra utiliser la formule : $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Exemple 8 — Soit X une variable aléatoire réelle telle que $E(X) = 0$. Montrer que : $E(|X|) \leq \sqrt{V(X)}$.

Exercice 5 — On suppose que $V(X) \neq 0$ et on note $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$. Montrer que : $E(Y) = 0$ et $V(Y) = 1$.